1 Préliminaires et notations.

Dans cette partie, on rappelle des notions et résultats basiques plus ou moins connus. On introduit aussi des notations. En particulier, on utilise les notations "$a := b$" ou "$b =: a$" pour dire que a est défini par b. Au niveau du calcul logique, on utilise les signes $\Longrightarrow$ (resp. $\Longleftrightarrow$) pour désigner une implication (resp. une équivalence). Ces signes n'apparaissent que placés entre deux propositions dans des formules mathématiques. On évitera de les utiliser dans du texte.

1.1 Ensembles et applications.

À lire.

Dans ce cours, on se base sur une notion intuitive d'ensemble. On dira qu'un élément a d'un ensemble E appartient à E et on notera "$x \in E$". On utilisera les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection d'ensembles. Étant donnés deux ensembles E et F, l'intersection $E \cap F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{et}\, x \in F\}$. La réunion $E \cup F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{ou}\, x \in F\}$. On note par $\emptyset$ l'ensemble vide c'est-à-dire l'ensemble sans élément. On dit que E est inclu dans F, on note $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F.
On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments et si et seulement si l'un est inclu dans l'autre et l'autre est inclu dans le premier. On a donc, pour deux ensembles E et F, les équivalences :

$$(E = F) \iff \big(\forall x\,, \quad (x \in E) \iff (x \in F)\big) \iff \big((E \subset F) \quad \text{et} \quad (F \subset E)\big)\,.$$

Si un ensemble A est inclu dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les ensembles de nombres entiers naturels, de nombres entiers relatifs, de nombres rationnels, de nombres réels et de nombres complexes, respectivement.

Étant donnés deux ensembles E et F, on note par $E \times F$ le produit cartésien de E par F c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Lorsque $E = F$, on note $E \times F$ par E^2. De même, le produit $E \times E \times E$ est noté E^3. Plus généralement, le produit de n copies de E (où n est un entier naturel non nul) est noté E^n (avec la convention $E^1 = E$).
Une application f de E dans F est la donnée pour chaque $x \in E$ d'un unique élément de F que l'on note $f(x)$. On note alors $f : E \longrightarrow F$. Cela revient à se donner une partie G de l'ensemble $E \times F$ qui vérifie la propriété :

$$\forall\, x \in E\,, \quad \forall\,(y; y') \in F^2\,, \quad \Big(\big((x; y) \in G\big) \text{ et } \big((x; y') \in G\big)\Big) \implies \big(y = y'\big)\,.$$

On note par Id_E l'application de E dans E qui, à $x \in E$, associe x.
Soit $f : E \longrightarrow F$. Pour une partie A de E, l'image $f(A)$ de A par f est la partie de F définie par

$$f(A) \;:=\; \{f(x)\,,\, x \in A\}\,.$$

Pour une partie B de F, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) \;:=\; \{x \in E\,;\; f(x) \in B\}\,.$$

Lorsqu'on a une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow G$, on définit la composée de g par f comme étant l'application $(g \circ f) : E \longrightarrow G$ qui, à $x \in E$, associe $g(f(x))$.
On rappelle qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite injective si

$$\forall\,(x; x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) = f(x')) \implies (x = x')\big)\,.$$

On dit qu'une telle application est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,.$$

À lire.

On remarque que cette dernière proposition est équivalente à $(f(E) = F)$.
Une telle application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective si elle est injective et surjective. Cette propriété est équivalente à

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists!\, x \in E\,; \quad y \;=\; f(x)\,.$$

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dit qu'elle est bijective de E sur son image $f(E)$ car l'application $f_1 : E \longrightarrow f(E)$ donnée par $f_1(x) = f(x)$ est bijective.
Prenons une application bijective $f : E \longrightarrow F$. L'application $g : F \longrightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, est bijective et on a $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si $h : F \longrightarrow E$ vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $h = g$. On appelle g la bijection réciproque de f et on la note $f^{\langle -1 \rangle}$.
On rappelle que la composée de deux applications injectives est injective, que la composée de deux applications surjectives est surjective. En particulier, la composée de deux applications bijectives est bijective.
On reviendra sur ces propriétés dans le paragraphe 7.1.

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application $* : (E \times E) \longrightarrow E$. Pour $(x; y) \in E^2$, on note l'image $*((x; y))$ de $(x; y)$ par $*$ aussi par $*(x; y)$ et par $x * y$.
On dit qu'une telle loi est commutative si

$$\forall\, (x; y) \in E^2\,, \quad x * y \;=\; y * x\,.$$

On dit qu'une telle loi est associative si

$$\forall\, (x; y; z) \in E^3\,, \quad x * (y * z) \;=\; (x * y) * z\,.$$

On dit qu'un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si

$$\forall\, x \in E\,, \quad x * e \;=\; e * x \;=\; x\,.$$

Si $*$ admet deux éléments neutres e et e' alors on a $e * e' = e'$, car e est un élément neutre, et $e * e' = e$, car e' est un élément neutre. Donc $e = e'$.
On dit qu'un élément $x \in E$ a un opposé pour la loi $*$ d'élément neutre e s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = e = \; y * x$.

1.2 Intervalles, bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, notée $\leq$, vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\, (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \Big((a + c \leq b + c) \iff (a \leq b) \Big)\,, \tag{1.1}$$

$$\forall\, (a; b) \in \mathbb{R}^2\,, \forall\, c > 0\,, \quad \Big((a \cdot c \leq b \cdot c) \iff (a \leq b) \Big)\,, \tag{1.2}$$

$$\forall\, (a; b) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \Big((-a \leq -b) \iff (b \leq a) \Big)\,. \tag{1.3}$$

On rappelle que, pour $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, la proposition $(a < b)$ est, par définition, la proposition

$$\big((a \leq b) \quad \text{et} \quad (a \neq b) \big)\,.$$

Autrement dit, "$a < b$" signifie $a \leq b$ et $a \neq b$.

On **admet** la propriété suivante, dite propriété d'Archimède : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n plus grand que x, i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}\,; \quad n \;\geq\; x\,. \tag{1.4}$$

On introduit maintenant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[a;b] \ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x \ \text{et}\ x \leq b\}\,, \quad [a;b[\ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x \ \text{et}\ x < b\}\,,$$

$$]a;b] \ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \ \text{et}\ x \leq b\} \quad \text{et} \quad]a;b[\ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \ \text{et}\ x < b\}\,.$$

On introduit les symboles $+\infty$ (dit "plus infini") et $-\infty$ (dit "moins infini") et on définit

$$[a;+\infty[\ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x\}\,, \quad]a;+\infty[\ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x\}\,,$$

$$]-\infty;a] \ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \leq a\} \quad \text{et} \quad]-\infty;a[\ := \ \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < a\}\,.$$

Les intervalles $]a;b[$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$ sont dits ouverts, les intervalles $[a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$ sont dits fermés.

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont que des notations commodes pour décrire certains intervalles. Plus loin, on les utilisera aussi pour les notions de bornes supérieure et inférieure et de limite infinie. En tout cas, ils ne représentent pas des nombres réels. On ne peut donc pas les considérer comme des éléments de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2. *Si x appartient à un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors il existe $(x_1;x_2) \in I^2$ avec $x_1 < x < x_2$. En particulier, on a $x \in]x_1;x_2[$ et $]x_1;x_2[\subset [x_1;x_2] \subset I$. On peut vérifier ce point en considérant séparément les trois cas d'intervalle ouvert.*

On donne certaines notions liées à la relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$. Soit $m \in \mathbb{R}$.*
On dit que m majore A (m est un majorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \leq m\,.$$

On dit que A est majorée si A admet un majorant, i.e. s'il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que m majore A.
On dit que m minore A (m est un minorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \geq m\,.$$

On dit que A est minorée si A admet un minorant, i.e. s'il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que m minore A.
On dit que m est un (le) plus grand élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m majore A. Dans ce cas, on note $m = \max A$.
On dit que m est un (le) plus petit élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m minore A. Dans ce cas, on note $m = \min A$.

On peut vérifier que, lorsqu'une partie A a un plus grand élément alors celui-ci est unique. Ainsi les propositions (m est un plus grand élément de A) et (m est le plus grand élément de A) sont équivalentes. C'est pourquoi on a inséré "(le)" dans la définition de plus grand élément. On a bien sûr la même chose avec les plus petits éléments.

La partie $A := [0;1]$ de $\mathbb{R}$ est majorée. En effet 2 est un majorant de A. 3 aussi. 1 aussi. Comme 1 appartient à A, c'est le plus grand élément de A.
La partie $B := [0;1[$ est aussi majorée. Elle est majorée par 2, 3 et 7. Mais elle n'admet pas de plus grand élément. On peut vérifier ce fait en raisonnant par l'absurde.
Supposons que b soit le plus grand élément de B. Alors $b \in B$ et b majore B. Comme $b \in B$, $0 \leq b < 1$. Il existe $c \in]b;1[$ (par exemple $c = (1+b)/2$). On a $c \in B$ et $b < c$. Comme b majore B, b est plus grand que chaque élément de B, donc, en particulier, $b \geq c$. On a donc une contradiction avec $b < c$.
La partie $C = [3;+\infty[$ n'est pas majorée. Vérifions ce point.
Supposons qu'un réel m majore C. On a, en particulier, $m \geq 3$. Donc $m+1 \geq 3$ et $(m+1) \in C$. Comme m majore C, m est, en particulier, plus grand que $m+1$. Contradiction.

De manière similaire, on vérifie que A est minorée et que 0 est son minimum, que $]0;7[$ est minorée mais n'a pas de minimum, que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.

Soit A un partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On **admet** que l'ensemble non vide des majorants de A a un plus petit élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ majore } A\}$ a un minimum.
De même, pour une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$, on **admet** que l'ensemble non vide des minorants de A a un plus grand élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ minore } A\}$ a un maximum.
Ces deux propriétés ne sont pas valables pour les parties de $\mathbb{Q}$. On peut trouver une partie non vide et majorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ majore } A\}$ n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. On peut aussi trouver une partie non vide et minorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ minore } A\}$ n'a pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.
L'absence de ces propriétés dans $\mathbb{Q}$ et leur importance pour les limites est l'une des raisons pour lesquelles on va travailler dans $\mathbb{R}$, dont la construction compliquée est admise.

Définition 1.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
Lorsque A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas majorée, on décide que la borne supérieure de A est $+\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\sup A$ la borne supérieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Lorsque A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand minorant de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas minorée, on décide que la borne inférieure de A est $-\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\inf A$ la borne inférieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Il est commode d'utiliser la **convention** suivante : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 1.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
On a $\inf A \leq \sup A$.
On a

$$\big((\sup A) \in A\big) \iff \big(A \text{ admet un maximum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\sup A = \max A$.
On a

$$\big((\inf A) \in A\big) \iff \big(A \text{ admet un minimum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\inf A = \min A$.

Preuve :

a). Soit $a \in A$. Par définition de $\inf A$, $\inf A$ minore A donc $\inf A \leq a$. Par définition de $\sup A$, $\sup A$ majore A donc $a \leq \sup A$. D'où $\inf A \leq a \leq \sup A$.

b). Preuve de la première équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A \in A$. Donc $\sup A$ est un réel et un majorant de A. Comme il appartient à A, c'est le maximum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un maximum m. m est un nombre réel qui majore A et qui appartient à A. A est donc majorée. Soit m' un majorant de A. m' majore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \geq m$. m est donc le plus petit majorant de A, i.e. $m = \sup A$.

À lire.

c). Preuve de la deuxième équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A \in A$. Donc $\inf A$ est un réel et un minorant de A. Comme il appartient à A, c'est le minimum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un minimum m. m est un nombre réel qui minore A et qui appartient à A. A est donc minorée. Soit m' un minorant de A. m' minore tous les éléments de

A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \leq m$. m est donc le plus grand majorant de A, i.e. $m = \inf A$. $\square$

On a vu plus haut que 1 est le maximum de $[0;1]$. La proposition nous permet d'affirmer que $1 = \sup[0;1]$. De même, 0 est le minimum de $[0;1]$ et la proposition nous donne que $0 = \inf[0;1]$.
On a aussi vu que l'ensemble $[0;1[$ n'a pas de maximum. Mais il a forcément une borne supérieure. Quelle est-elle ? Comme cet ensemble est majorée par 5, $\sup[0;1[\in \mathbb{R}$. On devine que $\sup[0;1[= 1$. Vérifions-le. Pour simplifier l'écriture, on pose $A := [0;1[$.
Tout d'abord, 1 est bien un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit majorant de A. Supposons le contraire. Il existe donc un majorant m de A tel que $m < 1$. Comme $(1+m)/2 \in]m;1[$ et $m \geq 0$, $(1+m)/2 \in [0;1[= A$. Comme m majore A, $m \geq (m+1)/2$ soit, par (1.2), $2m \geq m+1$ et, par (1.1), $m \geq 1$. Contradiction avec $m < 1$.
On a donc montré que 1 est le plus petit majorant de $[0;1[$, soit $\sup[0;1[= 1$.

1.3 Parties de $\mathbb{N}$ et théorèmes de récurrence.

Pour l'étude des suites, on va avoir besoin de quelques précisions sur les parties de $\mathbb{N}$. On donne des théorèmes de récurrence.
Tout d'abord, on introduit une notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$.

Définition 1.6. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[\![a;b]\!] := \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n \text{ et } n \leq b\}\,, \quad [\![a;b[\![:= \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n \text{ et } n < b\}\,,$$

$$]\!]a;b]\!] := \{n \in \mathbb{R}\,;\ a < n \text{ et } n \leq b\} \quad \text{et} \quad]\!]a;b[\![:= \{n \in \mathbb{N}\,;\ a < n \text{ et } n < b\}\,.$$

On définit aussi

$$[\![a;+\infty[\![:= \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n\}\,, \quad]\!]a;+\infty[\![:= \{n \in \mathbb{N}\,;\ a < n\}\,.$$

Toute ces parties de $\mathbb{N}$ sont les intervalles de $\mathbb{N}$.

On remarque que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $[\![a;b]\!] = [a;b] \cap \mathbb{N}$, $[\![a;b[\![= [a;b[\cap \mathbb{N}$, $]\!]a;b]\!] =]a;b] \cap \mathbb{N}$, $]\!]a;b[\![=]a;b[\cap \mathbb{N}$, $[\![a;+\infty[\![= [a;+\infty[\cap \mathbb{N}$ et $]\!]a;+\infty[\![=]a;+\infty[\cap \mathbb{N}$. On utilisera ces notations surtout dans le cas où a et b sont des entiers naturels.

On **admet** maintenant le théorème de récurrence suivant.

Théorème 1.7. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))\big)\Big)$$

$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Voyons un exemple d'application de ce théorème. On veut montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad 2^n \geq n+1\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soir $\mathcal{P}(n) = (2^n \geq n+1)$. Comme $2^0 = 1 \geq 0+1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \geq 2n+2$ soit $2^{n+1} \geq 2(n+1) \geq n+2 = (n+1)+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que le membre de gauche de l'implication dans le théorème 1.7 est vrai pour $n_0 = 0$.

Donc, le théorème nous donne la validité du membre de droite de cette implication et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

A-t-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 2n+1$? C'est vrai pour $n = 0$, faux pour $n = 1$ et $n = 2$. Cela semble vrai pour $n \geq 3$. Montrons-le par récurrence.
Pour $n \geq 3$ soit $\mathcal{Q}(n) = (2^n \geq 2n+1)$. On a $2^3 = 8 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1$. Donc $\mathcal{Q}(3)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \geq 3$, $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq 2n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1)$. Comme, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$2(2p+1) \geq 2(p+1)+1 \iff 2p \geq 1 \iff p > 0\,,$$

on a, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1) \geq 2(n+1)+1$, car $n \geq 3$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème 1.7, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Les variantes suivantes du théorème de récurrence sont parfois utiles. On **admet** leurs preuves.
Théorème de récurrence forte :

Théorème 1.8. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big((\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}) \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\ (\forall k \in [\![n_0\,;\,n]\!]\,,\ \mathcal{P}(\cancel{n})) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)$$

Hors programme.

$$\Longrightarrow \quad \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Lire k.

Théorème de récurrence finie :

Théorème 1.9. *Soit $(n_0; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$ et, pour tout $n \in [\![n_0; n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big((\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}) \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in [\![n_0; n_1[\![\,,\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))\big)\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \big(\forall n \in [\![n_0; n_1]\!]\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Théorème de récurrence descendante :

Théorème 1.10. *Soit $(n_0; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$ et, pour tout $n \in [\![n_0; n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big((\mathcal{P}(n_1) \text{ est vraie}) \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in]\!]n_0; n_1]\!]\,,\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n-1))\big)\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \big(\forall n \in [\![n_0; n_1]\!]\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

On donne quelques précisions sur les ensembles finis.

Définition 1.11. *Soit E un ensemble. On dit que E est un ensemble fini s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ de E, deux à deux distincts, tels que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Dans ce cas, p est unique et s'appelle le cardinal de E. Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini.*

On décide que l'ensemble vide est fini de cardinal 0.

Le résultat suivant s'avèrera utile par la suite.

Proposition 1.12. *Soit A une partie non vide et finie de $\mathbb{R}$. Alors A admet un maximum et un minimum.*

Hors programme.

Preuve : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : (toute partie de $\mathbb{R}$ de cardinal p admet un maximum et un minimum). Soit A une partie de $\mathbb{R}$ a un seul élément a. Comme $a \leq a$, a majore A et a minore A. Donc, par définition, $a = \max A$ et $a = \min A$. Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ayant $(p+1)$ éléments. On peut écrire A sous la forme $\{a_j; j \in [\![1; p+1]\!]\}$, avec des a_j deux à deux distincts. Soit $A' := \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. On a $A = A' \cup \{a_{p+1}\}$. Par l'hypothèse de récurrence, A' admet un maximum et un minimum. Soit $a_+ := \max(\max A'; a_{p+1}) \in A$ et $a_- := \max(\min A'; a_{p+1}) \in A$. On voit que a_+ majore A et que a_- minore A. Donc A admet a_+ pour maximum et a_- pour minimum. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Une partie A non vide et finie de $\mathbb{R}$ a forcément un cardinal $q \in \mathbb{N}^*$ donc, par $\mathcal{P}(q)$, A admet un maximum et un minimum. □

Voici une conséquence sur les parties de $\mathbb{N}$.

Proposition 1.13. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Pour $q \in \mathbb{N}$, toute partie de $[\![0; q]\!]$ est finie.*
2. *On a même l'équivalence : A est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset [\![0; q]\!]$.*
3. *On peut reformuler cette équivalence sous la forme :*

$$\Big((A \text{ est infinie}) \iff (\forall p \in \mathbb{N}\,,\, \exists n \in A\,;\ n > p) \Big)\,.$$

4. *A admet un plus petit élément.*

Preuve :

1. Pour $q \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(q)$ la proposition : (Toute partie non vide de $[\![0; q]\!]$ est finie). La seule partie non vide de $[\![0; 0]\!]$ est $\{0\}$ et elle s'écrit bien $\{a_0\}$ pour un $a_0 \in \mathbb{N}$. Donc elle est finie. Supposons que $\mathcal{Q}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de $[\![0; q+1]\!]$. Si $q+1 \notin B$, alors $B \subset [\![0; q]\!]$ et B est finie par l'hypothèse de récurrence. Si $q+1 \in B$ alors $B = C \cup \{q+1\}$ avec $C \subset [\![0; q]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $b_1; \cdots; b_p$ de $\mathbb{N}$, deux à deux distincts, tels que $C = \{b_j; j \in [\![1; q]\!]\}$. En posant, $b_{q+1} = q+1$, on a $B = \{b_j; j \in [\![1; q+1]\!]\}$ et B est finie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est finie. Par la proposition 1.12, A admet un maximum q. Comme q majore A et, bien sûr, 0 minore A, on a $A \subset [\![0; q]\!]$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $A \subset [\![0; q]\!]$, pour un $q \in \mathbb{N}$. D'après $\mathcal{Q}(q)$, A est finie.
3. On a

$$\begin{aligned}(A \,\text{est infinie}) \iff \text{non}\,(A\,\text{est finie}) &\iff \text{non}\,(\exists p \in \mathbb{N}\,;\ A \subset [\![0; p]\!]) \\ \iff (\forall p \in \mathbb{N}\,,\, A \not\subset [\![0; p]\!]) &\iff (\forall p \in \mathbb{N}\,,\, \exists n \in A\,;\ n > p)\,.\end{aligned}$$

4. Comme la partie A est non vide, il existe $a_0 \in A$. La partie $A \cap [\![0; a_0]\!]$ est non vide puisqu'elle contient $a_0 \in \mathbb{N}$. Elle est contenue dans $[\![0; a_0]\!]$ donc elle est finie (d'après le premier résultat). Par la proposition 1.12, elle admet donc un minimum a_-. On vérifie que a_- est le minimum de A. Soit $a \in A$. Si $a \leq a_0$, a appartient à $A \cap [\![0; a_0]\!]$ donc $a_- \leq a$. Si $a \geq a_0$ alors, comme a_0 appartient à $A \cap [\![0; a_0]\!]$, on a $a_- \leq a_0$ d'où $a_- \leq a_0 \leq a$. On a montré que a_- est le minimum de A. □

Les intervalles $[\![a; b]\!]$ avec $a \leq b$ et $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ sont finis. Les intervalles $]\!]a; +\infty[\![$ avec $a \in \mathbb{N}$, sont infinis. Les ensembles

$$2\mathbb{N} := \{2n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N}+1 := \{2n+1\,;\ n \in \mathbb{N}\}$$

sont infinis. On peut vérifier ces infinitudes en procédant par l'absurde.
On remarque, de plus, qu'une partie infinie D de $\mathbb{N}$ est une partie non majorée de $\mathbb{R}$.

Hors programme.

2 Voisinages dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On introduit plusieurs notions de voisinage dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. Celles-ci seront utiles pour la définition des limites de suite et de fonction.

2.1 Voisinages d'un point dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que la fonction module est la fonction $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$|z| \ := \ \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2.1}$$

Elle possède les propriétés suivantes : le module du zéro de $\mathbb{C}$ est nul, le module d'un nombre complexe non nul est strictement positif, le module d'un produit est le produit des modules, le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme de modules. Autrement dit, on a :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)\,,$$
$$\forall\, (z; z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |zz'| \ = \ |z| \cdot |z'|$$

et

$$\forall\, (z; z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z + z'| \ \le \ |z| \,+\, |z'|\,. \tag{2.2}$$

La propriété (2.2) s'appelle l'inégalité triangulaire. Une formulation équivalente de cette proposition est

$$\forall\, (z; z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| \,-\, |z'|\big| \ \le \ |z \,-\, z'|\,. \tag{2.3}$$

En désignant, pour $z \in \mathbb{C}$, par $\Re(z)$ sa partie réelle et par $\Im(z)$ sa partie imaginaire, on a

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \Big(\big(|\Re(z)| \,\le\, |z|\big) \quad \text{et} \quad \big(|\Im(z)| \,\le\, |z|\big)\Big)\,. \tag{2.4}$$

Définition 2.1. *Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$D(z_0; r[\ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z \,-\, z_0| \,<\, r\big\} \quad \textit{et} \quad D(z_0; r] \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z \,-\, z_0| \,\le\, r\big\}\,.$$

Le premier ensemble est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r tandis que le second est le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.

On remarque que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0; 0[$ est vide et $D(z_0; 0]$ est le singleton $\{z_0\}$. Lorsque $r > 0$, on peut vérifier que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r]$ sont des ensembles infinis. En effet, ils contiennent tous les deux l'ensemble infini

$$\Big\{z_0 \,+\, \frac{r}{2n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\Big\}\,.$$

On remarque aussi que la restriction à $D(z_0; r]$ de la fonction module est majorée par $|z_0| + r$. On pourra vérifier ce point en utilisant (2.3).

Considérons deux disques ouverts (resp. fermés), l'un de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_0 \in \mathbb{R}^+$ et l'autre de centre $z_1 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_1 \in \mathbb{R}^+$. À quelle condition les deux disques s'intersectent-ils ? On peut vérifier que

$$D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\ \ne \ \emptyset \quad \iff \quad |z_0 - z_1| \ < \ r_0 + r_1 \tag{2.5}$$

et que

$$D(z_0; r_0] \,\cap\, D(z_1; r_1] \ \ne \ \emptyset \quad \iff \quad |z_0 - z_1| \,\le\, r_0 + r_1\,.$$

À quelle condition l'un est-il inclu dans l'autre ? On peut vérifier que

$$D(z_0; r_0[\subset\ D(z_1; r_1[\quad \iff \quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \ < \ r_1$$

et que

$$D(z_0; r_0] \ \subset\ D(z_1; r_1] \quad \iff \quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \ \le\ r_1\,.$$

Définition 2.2. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est un voisinage (complexe) de z_0 s'il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $D(z_0; r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{z_0}$ l'ensemble des voisinages (complexes) de z_0.*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Les disques ouverts $D(z_0; r_0[$, pour $r_0 > 0$, sont tous des voisinages de z_0. Les disques fermés $D(z_0; r_0]$, pour $r_0 > 0$, sont tous aussi des voisinages de z_0. Mais z_0 admet des voisinages qui ne sont pas des disques. Par exemple, les ensembles

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_0) \in [-1; 1]\} \quad \text{et} \quad \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \in]-1; 2]\}$$

sont des voisinages de z_0. En effet, on peut vérifier qu'ils contiennent tous les deux le disque ouvert $D(z_0; 1/2[$. En revanche, l'ensemble

$$B := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \geq 0\}$$

n'est pas un voisinage de z_0. Vérifions ce point en raisonnant par l'absurde. Supposons que B soit un voisinage de z_0. Alors, par définition, il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Le nombre complexe $z_0 - ir/2$ appartient au disque $D(z_0; r[$ car $|(z_0 - ir/2) - z_0| = |-ir/2| = r/2 < r$. Donc, par l'inclusion précédente, il appartient aussi à B. On doit donc avoir $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) \geq 0$. Or $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) = \Im(-ir/2) = -r/2 < 0$. Contradiction. On a donc montré par l'absurde que B n'est pas un voisinage de z_0.

Proposition 2.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.*

1. *Un voisinage de z_0 contient forcément z_0 comme élément, i.e.*

$$\forall A \in \mathcal{V}_{z_0}, \quad z_0 \in A.$$

2. *L'intersection de deux voisinages de z_0 est un voisinage de z_0, i.e.*

$$\forall (A; B) \in (\mathcal{V}_{z_0})^2, \quad A \cap B \in \mathcal{V}_{z_0}.$$

3. *Une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage de z_0 est elle-même un voisinage de z_0, i.e.*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \ \Big((\exists B \in \mathcal{V}_{z_0}\,;\ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}_{z_0} \Big).$$

4. *Si z_1 est un nombre complexe différent de z_0 alors on peut trouver un voisinage de z_0 et un de z_1 qui ne se rencontrent pas, i.e., pour $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$,*

$$\exists (A; B) \in \mathcal{V}_{z_0} \times \mathcal{V}_{z_1}\,; \quad A \cap B = \emptyset.$$

Preuve :

1. Pour $A \in \mathcal{V}_{z_0}$, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset A$. Comme $z_0 \in D(z_0; r[$, $z_0 \in A$.
2. Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{z_0})^2$. Par définition, il existe donc $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $D(z_0; r_A[\subset A$ et $D(z_0; r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A; r_B) > 0$. On a $D(z_0; r[\subset D(z_0; r_A[\subset A$ et $D(z_0; r[\subset D(z_0; r_B[\subset B$ donc $D(z_0; r[\subset A \cap B$. $A \cap B$ est bien un voisinage de z_0.
3. Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de z_0. Il existe donc $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $D(z_0; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{z_0}$.
4. Prenons $z_1 \neq z_0$ dans $\mathbb{C}$. Donc $|z_1 - z_0| > 0$. Soit $r = |z_1 - z_0|/2 > 0$. Pour $r_1 = r$ et $r_2 = r$, le membre de droite de l'équivalence (2.5) est faux donc celui de gauche aussi. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r_1[$ sont donc disjoints. Comme $r > 0$, le premier est un voisinage de z_0 et le deuxième un voisinage de z_1. On a montré la dernière propriété. $\square$

2.2 Voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction module s'appelle la fonction valeur absolue et on la note aussi $|\cdot|$. On a donc $|\cdot|:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$. Les propriétés du module se transmette à la valeur absolue. On a donc

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\,,\quad \big(|x|=0\iff x=0\big)\,,$$
$$\forall\,(x;x')\in\mathbb{R}^2\,,\quad |xx'| \;=\; |x|\cdot|x'|\,,$$
$$\forall\,(x;x')\in\mathbb{R}^2\,,\quad |x+x'| \;\le\; |x|\,+\,|x'| \tag{2.6}$$

et

$$\forall\,(x;x')\in\mathbb{R}^2\,,\quad \big||x|\,-\,|x'|\big| \;\le\; |x\,-\,x'|\,. \tag{2.7}$$

La propriété (2.6) est l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et la proposition (2.7) en est une reformulation équivalente. On remarque que, pour $x\in\mathbb{R}$, $|x|$ est le maximum de x et $-x$, i.e. $|x|=\max(x;-x)$.

On introduit maintenant dans $\mathbb{R}$ une notion similaire à la notion de disque dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.4. *Pour $x_0\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^+$, on pose*

$$I(x_0;r[\;:=\;\big\{x\in\mathbb{R}\,;\;|x\,-\,x_0|\,<\,r\big\}\quad et\quad I(x_0;r]\;:=\;\big\{x\in\mathbb{R}\,;\;|x\,-\,x_0|\,\le\,r\big\}\,.$$

On appelle ces ensembles l'intervalle ouvert centré en x_0 de rayon r et l'intervalle fermé centré en x_0 de rayon r, respectivement.

On verra plus loin pourquoi on a choisi le nom "intervalle" dans cette définition (cf. proposition 2.7). On remarque que, pour $x_0\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^+$,

$$I(x_0;r[\;=\;D(x_0;r[\cap\mathbb{R}\quad\text{et}\quad I(x_0;r]\;=\;D(x_0;r]\cap\mathbb{R}\,.$$

On peut aussi déterminer à quelle condition deux tels intervalles du même type s'intersectent. On peut vérifier, pour $(x_0;x_1)\in\mathbb{R}^2$ et $(r_0;r_1)\in(\mathbb{R}^+)^2$, que

$$I(x_0;r_0[\cap I(x_1;r_1[\;\ne\;\emptyset\quad\iff\quad |x_0-x_1|\,<\,r_0+r_1$$

et que

$$I(x_0;r_0]\,\cap\,I(x_1;r_1]\;\ne\;\emptyset\quad\iff\quad |x_0-x_1|\,\le\,r_0+r_1\,.$$

À quelle condition l'un est-il inclu dans l'autre ? On peut vérifier que

$$I(x_0;r_0[\subset\,I(x_1;r_1[\quad\iff\quad |x_0-x_1|\,+\,r_0\,<\,r_1$$

et que

$$I(x_0;r_0]\,\subset\,I(x_1;r_1]\quad\iff\quad |x_0-x_1|\,+\,r_0\,\le\,r_1\,.$$

Définition 2.5. *Soit $x_0\in\mathbb{R}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage (réel) de x_0 s'il existe $r>0$ tel que l'intervalle ouvert centré en x_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $I(x_0;r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{x_0}$ l'ensemble des voisinages (réels) de x_0.*

Pour $x_0\in\mathbb{R}$, les intervalles ouverts (resp. fermés) centrés en x_0 et de rayon $r>0$ sont des voisinages de x_0 et sont des ensembles infinis. Le singleton $\{x_0\}$, en revanche, n'est pas un voisinage de x_0. En effet, il ne peut contenir un $I(x_0;r[$ avec $r>0$, qui est infini, puisqu'il est un ensemble fini.

Proposition 2.6. *Soit $x_0\in\mathbb{R}$.*

1. *Un voisinage de x_0 contient forcément x_0 comme élément, i.e.*

$$\forall\,A\in\mathcal{V}_{x_0}\,,\quad x_0\in\;A\,.$$

2. *L'intersection de deux voisinages de x_0 est un voisinage de x_0, i.e.*

$$\forall\,(A;B)\in(\mathcal{V}_{x_0})^2\,,\quad A\cap B\ \in\ \mathcal{V}_{x_0}\,.$$

3. *Une partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de x_0 est elle-même un voisinage de x_0, i.e.*

$$\forall\,A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\,,\ \Big((\exists\,B\in\mathcal{V}_{x_0}\,;\ B\subset A)\implies A\in\mathcal{V}_{x_0}\Big)\,.$$

4. *Si x_1 est un nombre réel différent de x_0 alors on peut trouver un voisinage de x_0 et un de x_1 qui ne se rencontrent pas, i.e., pour $x_1\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$,*

$$\exists\,(A;B)\in\mathcal{V}_{x_0}\times\mathcal{V}_{x_1}\,;\quad A\cap B\ =\ \emptyset\,.$$

Preuve : On peut suivre la preuve de la proposition 2.3. □

Attention : Pour alléger les notations, on a noté, pour $x_0\in\mathbb{R}$, de la même façon $\mathcal{V}_{x_0}$ deux ensembles différents : l'ensemble des voisinages réels de x_0 et l'ensemble des voisinages complexes du complexe x_0. L'ensemble $\{z\in\mathbb{C};\,\Re(z)\in]-1;1[\,,\Im(z)=0\}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{R}$ et, en tant que telle, c'est un voisinage réel de 0. Comme partie de $\mathbb{C}$, ce n'est pas un voisinage complexe de 0.
Quand on utilise le mot "voisinage" ou la notation $\mathcal{V}_{x_0}$, il y a donc un risque de confusion et, dans ce cas, on précisera "voisinage réel" ou "voisinage complexe", "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{R}$ ou "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{C}$.

Vérifions maintenant que les intervalles centrés en un point sont bien des intervalles.

Proposition 2.7. *Pour $x_0\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^+$, $I(x_0;r[=]x_0-r;x_0+r[$ et $I(x_0;r]\ =\ [x_0-r;x_0+r]$. Autrement dit, pour $x\in\mathbb{R}$, les deux équivalences suivantes sont vraies :*

$$\big(|x\,-\,x_0|\ <\ r\big)\iff\big(x_0-r\ <\ x\ <\ x_0+r\big)\,,$$
$$\big(|x\,-\,x_0|\ \le\ r\big)\iff\big(x_0-r\ \le\ x\ \le\ x_0+r\big)\,.$$

Preuve : Notons que la première équivalence est aussi $(x\in I(x_0;r[\iff x\in]x_0-r;x_0+r[)$, la seconde est aussi $(x\in I(x_0;r]\iff x\in[x_0-r;x_0+r])$. La validité de ces équivalences donnent donc les égalités d'ensembles annoncées.
En utilisant (1.1) puis (1.3), on a

$$\big(x_0-r\ <\ x\ <\ x_0+r\big)\iff\big(-r\ <\ x\,-\,x_0\ <\ r\big)\iff\Big(\big(x\,-\,x_0\ <\ r\big)\text{ et }\big(-(x\,-\,x_0)\ <\ r\big)\Big)$$

et, en utilisant le fait que, pour $a\in\mathbb{R}$, $|a|=\max(-a;a)$, on a

$$\Big(\big(x\,-\,x_0\ <\ r\big)\text{ et }\big(-(x\,-\,x_0)\ <\ r\big)\Big)\iff\big(|x\,-\,x_0|\ <\ r\big)\,.$$

On a montré la première équivalence. Pour montrer l'autre, on peut suivre les mêmes arguments en remplaçant partout les "$<$" par des "$\le$". □

On peut maintenant donner une caractérisation des voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.8. *Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I qui contient x_0 et qui est inclu dans A. Autrement dit : $A\in\mathcal{V}_{x_0}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$I\ \subset\ A\quad\text{et}\quad x_0\ \in\ I\,.$$

Preuve :
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est un voisinage de x_0. Il existe donc $r>0$ tel que $I(x_0;r[\subset A$. On a $x_0\in I(x_0;r[$

et $I(x_0;r[$ est un intervalle ouvert par la proposition 2.7.
$\Longleftarrow)$: On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et inclu dans A. On sait qu'il existe $(x_1;x_2) \in I^2$ tel que $x_0 \in]x_1;x_2[$ et $]x_1;x_2[\subset I$ (cf. remarque 1.2). Soit $r = \min(|x_0 - x_1|;|x_0 - x_2|) > 0$. On va montrer que $I(x_0;r[\subset]x_1;x_2[$. Si $x \in I(x_0;r[$, on a, par la proposition 2.7,

$$x_1 \;=\; x_0 \;-\; |x_0 - x_1| \;\leq\; x_0 \;-\; r \;<\; x \;<\; x_0 + r \;\leq\; x_0 \;+\; |x_0 - x_2| \;=\; x_2\,.$$

Donc $x \in]x_1;x_2[$. On a montré que $I(x_0;r[\subset]x_1;x_2[$. Or $]x_1;x_2[\subset I$ et $I \subset A$ donc $I(x_0;r[\subset A$. A est donc un voisinage de x_0. $\square$.

La notion suivante sera aussi importante pour l'étude des limites.

Définition 2.9. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point adhérent à A si, pour tout $r > 0$, $I(x_0;r[$ rencontre A, i.e. $I(x_0;r[\cap A \neq \emptyset$.*

4 est un point adhérent à $[1;7[$ puisque tout voisinage de 4 rencontre $[1;7[$ en, au moins, 4. On peut vérifier que 7 est aussi un point adhérent à $[1;7[$. Mais 0 n'est pas adhérent à $[1;7[$ car l'intervalle ouvert $]-1;1[$ centré en 0 ne rencontre pas $[1;7[$.

Proposition 2.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Tout élément de A est un point adhérent à A. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) \iff (\mathbb{R}\setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\,.$$

Hors programme.

Preuve : Prenons un $x_0 \in A$. Pour tout $r > 0$, $x_0 \in I(x_0;r[$ donc $x_0 \in I(x_0;r[\cap A$ et $I(x_0;r[\cap A \neq \emptyset$. On a montré que a est adhérent à A.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Dire que $I(x_0;r[$ rencontre A équivaut à dire que $I(x_0;r[$ n'est pas inclu dans le complémentaire de A, c'est-à-dire :

$$I(x_0;r[\cap A \neq \emptyset \iff I(x_0;r[\not\subset (\mathbb{R}\setminus A)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) &\iff \big(\forall\, r > 0\,,\quad I(x_0;r[\cap A \neq \emptyset\big)\\ &\iff \big(\forall\, r > 0\,,\quad I(x_0;r[\not\subset (\mathbb{R}\setminus A)\big)\\ &\iff \text{non } \big(\exists\, r > 0\,,\quad I(x_0;r[\subset (\mathbb{R}\setminus A)\big)\\ &\iff (\mathbb{R}\setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\,.\end{aligned}$$

On obtient donc l'équivalence cherchée. $\square$

2.3 Voisinages, dans $\mathbb{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour l'étude des limites, il sera commode de disposer d'une notion de voisinage réel pour les symboles $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 2.11. *Soit A un partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a;+\infty[\subset A$.
On dit que A est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty;a[\subset A$.
On note par $\mathcal{V}_{+\infty}$ (resp. $\mathcal{V}_{-\infty}$) l'ensemble des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 2.12. *Soit $X \in \{-\infty;+\infty\}$.*

1. *L'intersection de deux voisinages de X est un voisinage de X, i.e.*

$$\forall\,(A;B) \in (\mathcal{V}_X)^2\,,\quad A \cap B \;\in\; \mathcal{V}_X\,.$$

2. *Une partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de X est elle-même un voisinage de X, i.e.*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \left((\exists B \in \mathcal{V}_X ; \; B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}_X \right).$$

3. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut trouver un voisinage de $-\infty$, un voisinage de a et un voisinage de $+\infty$ qui ne se rencontrent pas, deux à deux, i.e.*

$$\exists (A; B; C) \in \mathcal{V}_{-\infty} \times \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_{+\infty} ; \quad ((A \cap B = \emptyset) \text{ et } (A \cap C = \emptyset) \text{ et } (B \cap C = \emptyset)).$$

Preuve : On fait la preuve dans le cas où $X = +\infty$. L'autre cas est similaire.

À lire.

1. Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Il existe donc $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $]a; +\infty[\subset A$ et $]b; +\infty[\subset B$. Soit $c = \max(a; b)$. On a $]c; +\infty[\subset]a; +\infty[\subset A$ et $]c; +\infty[\subset]b; +\infty[\subset B$ donc $]c; +\infty[\subset (A \cap B)$. Donc $(A \cap B) \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
2. Soit $(A; B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$ tel que $B \subset A$ et $B \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]b; +\infty[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a aussi $]b; +\infty[\subset A$ donc $A \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
3. Soit $\delta > 0$, $A :=]-\infty; a - \delta[$, $B := I(a; \delta[=]a - \delta; a + \delta[$ et $C :=]a + \delta; +\infty[$. On a $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$, $B \in \mathcal{V}_a$ et $C \in \mathcal{V}_{+\infty}$. De plus, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$. □

Contrairement aux voisinages d'un point, qui contiennent le point en question, un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ne contient pas $+\infty$ (resp. $-\infty$) puisqu'il est une partie de $\mathbb{R}$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$ (resp. $-\infty \notin \mathbb{R}$). Pour $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $]a; +\infty[$ et $[a; +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$. L'ensemble $\{0\} \cup [1; +\infty[$ n'est pas un intervalle mais est un voisinage de $+\infty$. En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.

Définition 2.13. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que $+\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{+\infty}, \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

On dit que $-\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $-\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{-\infty}, \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

On remarque que $+\infty$ est adhérent à $[1; +\infty[$. En utilisant la propriété d'Archimède (1.4), on peut vérifier que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.

Pour l'étude des limites de suites, il est utile d'introduire la notion de voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 1.13, $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie finie de $\mathbb{N}$ mais est adhérent à une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 2.14. *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a; +\infty[\![\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{+\infty}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$.*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit qu'une partie A de D est un voisinage dans D de $+\infty$ si c'est la trace sur D d'un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_{+\infty}^{\mathbb{N}}$ tel que $A = D \cap B$. On note par $\mathcal{V}_{+\infty}^{D}$ l'ensemble des voisinages dans D de $+\infty$.

Pour une partie infinie D de $\mathbb{N}$, les voisinages dans D de $+\infty$ ne sont pas vides, puisque $+\infty$ est adhérent à D.

Proposition 2.15. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

1. *L'intersection de deux voisinages dans D de $+\infty$ est un voisinage dans D de $+\infty$, i.e.*

$$\forall (A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty}^{D})^2, \quad A \cap B \in \mathcal{V}_{+\infty}^{D}.$$

Hors programme.