Hors programme.

2. *Une partie de D contenant un voisinage dans D de $+\infty$ est elle-même un voisinage dans D de $+\infty$, i.e.*
$$\forall A \in \mathcal{P}(D)\,,\ \Big((\exists B \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,;\ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}^D_{+\infty} \Big)\,.$$

Preuve : On peut suivre la preuve de la proposition 2.12. □.

L'ensemble $\{3\} \cup [\![9; +\infty[\![$ est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ mais $2\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$. Considérons l'ensemble $C = \{2p; p \in [\![3; +\infty[\![\}$. Comme $C = [\![6; +\infty[\![\cap (2\mathbb{N})$ et $[\![6; +\infty[\![$ est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$, C est la trace sur $2\mathbb{N}$ d'un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ donc C est un voisinage dans $2\mathbb{N}$ de $+\infty$.

3 Suites réelles et complexes.

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et définir une notion de limite pour de telles suites.

3.1 Définitions et premiers exemples.

On introduit ici les notions de suite réelle et de suite complexe simultanément. Pour ce faire, le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$, pour les suites réelles, soit $\mathbb{C}$, pour les suites complexes.

Définition 3.1. *Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D est le domaine de définition de la suite u. Pour $n \in D$, la valeur de u en n, à savoir $u(n)$, est aussi notée par u_n. C'est un élément de $\mathbb{K}$. On désigne parfois u par $(u_n)_{n\in D}$. L'ensemble des suites définies sur une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^D$.*
Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite réelle.
Une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée suite complexe.

Au lieu de considérer toutes les applications définies sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a choisi de se limiter à celles qui sont définies sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ car, pour celles-ci seulement, on aura une notion de limite.

Considérons quelques exemples de suites réelles.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/(n+1)$. Soit $D = [\![3; +\infty[\![$ et $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1/n$. Bien que ces trois suites se ressemblent, elles sont différentes.
Soit $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ si n est pair, et $x_n = -1$, si n est impair. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une formule pour x_n à savoir $x_n = (-1)^n$. Donc $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $y : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = n$, si $n \le 7$, et $y_n = -1$, si $n > 7$. On remarque que y n'est pas une suite constante mais elle est constante égale à -1 à partir du rang 8, c'est-à-dire si l'on oublie les 7 premiers termes.
Pour un entier naturel n, la formule
$$\frac{7n+5}{n(n-3)}$$
a un sens exactement quand $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et le résultat est un nombre réel. On peut donc définir une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D = \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et, pour $n \in D$,
$$u_n = \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

On peut aussi considérer la suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D' = [\![4; +\infty[\![$ et, pour $n \in D'$,

$$v_n \;=\; \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

C'est en fait la restriction de u à D'.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$\frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

n'a de sens que si $n \notin \{4k;\, k \in \mathbb{N}\} := 4\mathbb{N}$. En posant $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$, qui est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$, la suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

est bien définie.
Considérons maintenant des exemples de suites complexes.
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i^n$. En notant par exp l'exponentielle complexe, soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $v \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(in\pi/6)$. Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (1/n) + (i/n^2)$.

3.2 Suites récurrentes.

Une importante classe de suites est formée par les suites récurrentes que l'on va définir ici. On va voir deux types de suite récurrente : les suites récurrentes associées à une fonction et les séries. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2.1 Suites récurrentes associées à une fonction.

On se donne une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est une partie de $\mathbb{K}$. On veut construire de proche en proche une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ en choisissant $u_0 \in \mathcal{D}$, en posant $u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite. Est-on sûr de définir ainsi une suite ? Est-on sûr d'en définir qu'une, une fois que u_0 a été choisi ?
Un premier problème est le suivant : il se pourrait que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \mathcal{D}$. Dans ce cas, nous serions dans l'incapacité de définir u_{n+1} puisque l'on ne peut appliquer f à u_n. C'est précisément ce qui se passe dans l'exemple suivant : on prend $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $u_0 = 2$. On a bien $u_0 \in [1; +\infty[$ donc $u_1 = f(u_0) = f(2) = 1$. On a bien $u_1 \in [1; +\infty[$ donc $u_2 = f(u_1) = f(1) = 0$. Mais $u_2 \notin [1; +\infty[$.
On va voir que l'on peut éviter ce problème en imposant que l'image de la fonction f soit incluse dans son domaine de définition.
Le second problème est lié au fait que l'on doit définir u_n pour **tout** $n \in \mathbb{N}$. Pour un n explicite, par exemple $n = 10$, on peut le faire en calculant successivement les termes $u_1, \cdots, u_9$ puis définir u_{10} par $f(u_9)$. Comme on doit faire cela pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on est confronté à une procédure infinie, sans savoir si elle est justifiée. Par bonheur, le théorème de récurrence va nous permettre vérifier que l'on construit bien ainsi une suite (et une seule, une fois le premier terme choisi).

Proposition 3.2. *Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dont le domaine de définition $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On suppose que l'image par f de $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que*

$$f(\mathcal{D}) \;:=\; \big\{f(x)\,;\; x \in \mathcal{D}\big\} \;\subset\; \mathcal{D}\,.$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $u_0 = d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; f(u_n)\,. \tag{3.1}$$

Hors programme.

Remarque 3.3. *La preuve qui suit peut sembler compliquée. Cependant, il y a dans cette preuve une difficulté subtile. On renvoie à l'annexe à la fin du cours pour un éclaircissement à ce sujet.*

Preuve de la proposition 3.2 : Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe $(n+1)$ applications $v^{(j)}$, pour $j \in [\![0;n]\!]$, telles que, pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $v^{(j)} : [\![0;j]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$, $v^{(j)}(0) = d$ et, si $j \geq 1$, la restriction de $v^{(j)}$ à $[\![0;j-1]\!]$ est égale à $v^{(j-1)}$ et, pour tout $p \in [\![0;j-1]\!]$, $v^{(j)}(p+1) = f(v^{(j)}(p))$.
Soit $v^{(0)} : \{0\} \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $v^{(0)}(0) = d$. On considère l'application $v^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $v^{(1)}(0) = v^{(0)}(0) = d \in \mathcal{D}$ et $v^{(1)}(1) = f(v^{(0)}(0)) = f(d)$. Comme $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $d \in \mathcal{D}$, $f(d) \in \mathcal{D}$. On a donc $v^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$. De plus, la restriction de $v^{(1)}$ à $\{0\}$ coïncide avec $v^{(0)}$ et $v^{(1)}(1) = f(v^{(0)}(0)) = f(v^{(1)}(0))$. On constate donc que $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque ces applications $v^{(0)}$ et $v^{(1)}$ vérifient les conditions imposées dans $\mathcal{P}(1)$.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose donc d'applications $v_0; \cdots; v_n$ vérifiant les propriétés énoncés dans $\mathcal{P}(n)$. On considère l'application $v^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ dont la restriction à $[\![0;n]\!]$ est $v^{(n)}$ et dont la valeur en $(n+1)$ est $f(v^{(n)}(n))$ (qui est bien définie car $v^{(n)}(n) \in \mathcal{D}$ d'après $\mathcal{P}(n)$). Comme $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $v^{(n+1)}(n+1) \in \mathcal{D}$ et $v^{(n+1)}$ est à valeurs dans $\mathcal{D}$.
On vérifie maintenant que ces $(n+1)+1$ applications $v^{(j)}$, qui sont données, pour $j \in [\![0;n]\!]$, par $\mathcal{P}(n)$, et par l'application $v^{(n+1)}$ que l'on vient de construire, vérifient les conditions imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
Toutes ces applications sont à valeurs dans $\mathcal{D}$.
Pour $j \in [\![0;n]\!]$, on a $v^{(j)}(0) = d$, d'après $\mathcal{P}(n)$, et, en particulier, $v^{(n)}(0) = d$. Comme $v^{(n)}$ est la restriction de $v^{(n+1)}$ à $[\![0;n]\!]$, $v^{(n+1)}(0) = v^{(n)}(0) = d$.
Soit $j \in [\![1;n+1]\!]$. Si $j \leq n$, on sait, par $\mathcal{P}(n)$, que la restriction de $v^{(j)}$ à $[\![0;j-1]\!]$ est égale à $v^{(j-1)}$. Par définition de $v^{(n+1)}$, sa restriction à $[\![0;(n+1)-1]\!]$ est bien $v^{(n)} = v^{((n+1)-1)}$.
Pour $j \in [\![1;n]\!]$ et $p \in [\![0;j-1]\!]$, on a $v^{(j)}(p+1) = f(v^{(j)}(p))$, par $\mathcal{P}(n)$. Soit $p \in [\![0;(n+1)-1]\!]$. Si $p \leq n-1$ alors $p+1 \in [\![0;n]\!]$ et $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1) = f(v^{(n)}(p))$, d'après $\mathcal{P}(n)$. Or, comme $p \leq n-1$, $v^{(n)}(p) = v^{(n+1)}(p)$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = f(v^{(n+1)}(p))$. Si, enfin, $p = n$, on a, par définition de $v^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n))$ et, comme $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncide sur $[\![0;n]\!]$, $v^{(n)}(n) = v^{(n+1)}(n)$ donc $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n)) = f(v^{(n+1)}(n))$.
On a vérifié que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $u_n = v^{(n)}(n)$. On a $u_0 = v^{(0)}(0) = d \in \mathcal{D}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $v^{(n)}$ est à valeurs dans $\mathcal{D}$ par $\mathcal{P}(n)$, $u_n \in \mathcal{D}$. Donc u est aussi à valeurs dans $\mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(n+1)$, $u_{n+1} = v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n)) = f(u_n)$. Donc u vérifie (3.1).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite u. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $v_0 = d$ et (3.1) avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (u_n = v_n)$. Comme $u_0 = d = v_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $u_n = v_n \in \mathcal{D}$ donc $f(u_n) = f(v_n)$ et, par (3.1) (pour u et pour v), $u_{n+1} = f(u_n) = f(v_n) = v_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $v = u$. $\square$.

Définition 3.4. *On se place dans le cadre de la proposition 3.2. Pour $d \in \mathcal{D}$, la suite u est appelée suite récurrente associée à f de premier terme d. La proposition* (3.1) *s'appelle la relation de récurrence satisfaite par u.*

On définit maintenant la classe des suites arithmético-géométriques, qui constituent des exemples de suites récurrentes associées à une fonction. Soit $(a;b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $f(x) = a \cdot x + b$. Comme l'image du domaine de f est incluse dans $\mathbb{K}$, le domaine de f, on peut appliquer la proposition 3.2 à cette fonction f. Pour $d \in \mathbb{K}$, il existe donc une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $u_0 = d$ et (3.1). Cette dernière s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \;=\; a \cdot u_n \,+\, b\,. \tag{3.2}$$

Définition 3.5. *Soit $(a;b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $d \in \mathbb{K}$. L'unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ de premier terme $u_0 = d$ vérifiant* (3.2) *est la suite arithmético-géométrique associée à $(a;b)$ et de premier terme d.*
Lorsque $b = 0$, on dit que u est la suite géométrique de raison a et de premier terme d.
Lorsque $a = 1$, on dit que u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme d.

3.2.2 Sommes et séries.

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On souhaite effectuer la somme des termes de la suite u du premier terme au $n$ième, pour un $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, une telle somme est $s_0 = u_0$. Lorsque $n = 1$, une telle somme est $s_1 = u_0 + u_1$. Lorsque $n = 2$, une telle somme est $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$. Pour n arbitraire, on a envie d'écrire

$$s_n \ = \ u_0 \ + \ u_1 \ + \ \cdots \ + \ u_{n-1} \ + \ u_n \, . \tag{3.3}$$

On rencontre de nouveau une procédure essentiellement infinie puisque n n'est pas limité. Grâce au théorème de récurrence, on va pouvoir donner un sens précis à toutes ces sommes.

Proposition 3.6. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $s_{n_0} = u_{n_0}$ et*

Hors programme.

$$\forall n \in D \, , \quad s_{n+1} \ = \ s_n \ + \ u_{n+1} \, . \tag{3.4}$$

Remarque 3.7. *Ici aussi, on fait face à la difficulté subtile mentionnée dans la remarque 3.3.*

Preuve de la proposition 3.6 : On suit la démarche de la preuve de la proposition 3.2. On montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, donnée par :
Il existe $(n+1)$ applications $v^{(j)}$, pour $j \in [\![0; n]\!]$, telles que, pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, $v^{(j)} : [\![n_0; n_0 + j]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$, $v^{(j)}(n_0) = u_{n_0}$ et, si $j \geq 1$, la restriction de $v^{(j)}$ à $[\![n_0; n_0 + j - 1]\!]$ est égale à $v^{(j-1)}$ et, pour tout $p \in [\![n_0; n_0 + j - 1]\!]$, $v^{(j)}(p + 1) = v^{(j)}(p) + u_{p+1}$.
On construit $v^{(0)} : [\![n_0; n_0]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v^{(1)} : [\![n_0; n_0 + 1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant $v^{(0)}(n_0) = u_{n_0}$, $v^{(1)}(n_0) = v^{(0)}(n_0) = u_{n_0}$ et $v^{(1)}(n_0 + 1) = v^{(1)}(n_0) + u_{n_0+1} = v^{(0)}(n_0) + u_{n_0+1}$.
Comme dans la preuve de la proposition 3.2, on vérifie que $\mathcal{P}(1)$ est vraie en utilisant les applications $v^{(0)}$ et $v^{(1)}$ précédentes, et on vérifie que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire (i.e. $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$). Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec n_0 remplacé par 1), on obtient la validité de $\mathcal{P}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors la suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ par $s_n = v^{(n)}(n)$. La validité de $\mathcal{P}(n)$ permet de vérifier que s satisfait la condition (3.4). Enfin, pour montrer l'unicité de s, on prend une suite $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $v_{n_0} = u_{n_0}$ et (3.4) (avec s remplacé par v). Comme dans la preuve de la proposition 3.2, on montre par récurrence la proposition $(s_n = v_n)$, pour $n \in D$. On conclut alors que $v = s$, ce qui donne l'unicité de s. □

Définition 3.8. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. La suite s construite dans la proposition 3.6 est appelée suite des sommes partielles de la suite u. On dit aussi que c'est la série de terme général u_n. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite s, qui sont des sommes finies. Pour $n \in D$, on pose :*

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \ := \ \sum_{k \in [\![n_0; n]\!]} u_k \ := \ \sum_{n_0 \leq k \leq n} u_k \ := \ s_n \, . \tag{3.5}$$

Le signe $\sum$ se dit "somme" ou bien "sigma" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "sigma"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice de la somme. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \ := \ 0 \, .$$

Attention, dans la dernière notation de (3.5), il est sous-entendu que l'indice k de la somme est un entier. On peut changer le symbole désignant l'indice de ces sommes sans changer les sommes en question. Il n'a pas d'existence extérieure, il ne sert qu'à décrire la somme. Il joue un rôle similaire à l'indice utilisé dans une boucle en informatique. En particulier, il ne peut pas apparaître en dehors de la somme.

Alors que les séries seront étudiées de manière systématique en L2, on se limitera, dans ce cours, à quelques exemples. En revanche, on se servira souvent des symboles introduits dans (3.5) qui permettent de décrire des sommes finies.

À lire.

Voyons maintenant quelques propriétés de ces sommes. Prenons une suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Considérons le troisième terme s_3 de la suite s des sommes partielles de u. Par définition, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_2 = s_1 + u_2$ et $s_1 = u_1$. Donc $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$. On peut aussi écrire $s_3 = u_3 + u_2 + u_1$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{3-\ell} \,.$$

Si $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $v_p = u_{p+1}$ alors $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ est aussi $v_0 + v_1 + v_2$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} v_\ell \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{\ell+1} \,.$$

On peut aussi écrire $s_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ et $s_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{2} u_k\right) + \left(\sum_{k=3}^{3} u_k\right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{1} u_k\right) + \left(\sum_{k=2}^{3} u_k\right) .$$

Soit $(w_1; w_2; w_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $u_1 = 2w_1$, $u_2 = 2w_2$ et $u_3 = 2w_3$. On peut écrire $s_3 = u_1 + (2w_1 + 2w_3) = 2w_1 + 2(w_2 + w_3) = 2(w_1 + (w_2 + w_3)) = 2(w_1 + w_2 + w_3)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{k=1}^{3} 2w_k \;=\; 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} w_k \,.$$

Si $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, on peut considérer la somme $(u_1 + x_1) + (u_2 + x_2) + (u_3 + x_3)$ et l'écrire $(u_1 + u_2 + u_3) + (x_1 + x_2 + x_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} (u_k \,+\, x_k) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{3} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right) .$$

On sent que ces propriétés sont générales, elles ne dépendent pas du nombre de termes dans la somme. On s'attend donc à ce qu'elles soient vraies quelque soit le nombre de termes. Comme ce dernier n'est pas majoré, on va avoir besoin du théorème de récurrence pour les établir dans le cas général. C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $u : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq n_0$,*

$$\forall q \in [\![n_0; n]\!] , \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k , \tag{3.6}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} , \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m} , \tag{3.7}$$

$$\forall m \in [\![0; n_0]\!] , \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m} , \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{n-\ell} \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} , \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \lambda u_k = \lambda \cdot \sum_{k=n_0}^{n} u_k , \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k) = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k \right) . \tag{3.12}$$

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| . \tag{3.13}$$

Si u est constante égale à $c \in \mathbb{K}$ alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = c \cdot (n - n_0 + 1) , \tag{3.14}$$

c'est-à-dire c fois le nombre d'éléments dans $[\![n_0; n]\!]$.

Preuve :

1. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = ((3.6)$ est vraie). Pour $n = n_0$, on a (3.6) est vraie d'après la convention adoptée dans la définition 3.8. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8,
$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + u_{n+1} ,$$
ce qui est précisément la formule dans (3.6) pour n remplacé par $n+1$ et $q = n+1$. Maintenant, soit $q \in [\![n_0; n]\!]$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,
$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + u_{n+1} = \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k \right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n} u_k \right) + u_{n+1} = \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k \right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n+1} u_k \right) .$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.6).
2. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{Q}(n) = ((3.7)$ est vraie). Pour $n = n_0$, on a
$$\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k = u_{n_0} = u_{(n_0+m)-m} = \sum_{\ell=n_0+m}^{n_0+m} u_{\ell-m}$$

Hors programme.

donc $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \left(\sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\right) + u_{(n+1+m)-m} = \sum_{\ell=n_0+m}^{(n+1)+m} u_{\ell-m} .$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.7). Par le même argument mais en changeant chaque m par $-m$, pour $m \in [\![n_0; n]\!]$, on montre (3.8).

3. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{R}(n) = \left(\forall x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![} , \quad \sum_{k=n_0}^{n} x_k = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n-\ell}\right) .$$

$\mathcal{R}(n_0)$ est vraie car, pour tout $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$ et $n = n_0$, $x_{n_0} = x_{n-0}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. Pour $p \geq n_0$, soit $w_p = x_{p+1}$. On a $w \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. On a, par (3.6) avec n remplacé par $n+1$, u remplacé par x et $q = n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} x_k\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} w_{k-1}\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{k=n_0}^{n} w_k\right) + x_{n_0} ,$$

d'après (3.8) pour u remplacée par w et $m = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à w, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} w_{n-\ell}\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n+1-\ell}\right) + x_{n+1-(n+1-n_0)} = \sum_{\ell=0}^{n+1-n_0} x_{n-\ell} .$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.9) puisque $u \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$.

4. Pour $p \in [\![n_0; n]\!]$, soit $y_p = u_{n+n_0-p}$ et, pour $p > n$, $y_p = 0$. On a donc, par (3.9) appliquée à y,

$$\sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} = \sum_{p=n_0}^{n} y_p = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} y_{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{\ell+n_0} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k ,$$

par (3.9) avec $m = n_0$. On a montré (3.10).

5. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{S}(n) = \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)\right) .$$

Comme $(\lambda u_{n_0} + v_{n_0}) = \lambda(u_{n_0}) + (v_{n_0})$, $\mathcal{S}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k)\right) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right) + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} v_k\right) ,\end{aligned}$$

par la définition 3.8. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $v = 0$, on obtient (3.11). D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = 1$, on obtient (3.12).

Hors programme.

Hors programme.

6. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{T}(n) = ((3.13)$ est vraie). $\mathcal{T}(n_0)$ est vraie car

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n_0} u_k \right| = |u_{n_0}| \leq |u_{n_0}| = \sum_{k=n_0}^{n_0} |u_k| \,.$$

Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8, l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \right| = \left| \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + u_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| + |u_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \right) + |u_{n+1}| = \sum_{k=n_0}^{n+1} |u_k|.$$

Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.13).

7. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{U}(n) = ((3.14)$ est vraie). $\mathcal{U}(n_0)$ est vraie car $u_{n_0} = c(n_0 - n_0 + 1)$. Supposons que $\mathcal{U}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + u_{n+1} = c \cdot (n - n_0 + 1) + c = c \cdot (n + 1 - n_0 + 1) \,.$$

Donc $\mathcal{U}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{U}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.14). □

En application, on peut montrer le résultat suivant sur les suites arithmético-géométrique.

Proposition 3.10. *Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a; b)$ (cf. Definition 3.5). On a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,, \quad u_n = d \cdot a^n + b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \,. \tag{3.15}$$

Lorsque $b = 0$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d \cdot a^n$.
Lorsque $a = 1$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.
De plus, si $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \,. \tag{3.16}$$

Preuve : À faire en td. □

3.2.3 Produits, puissances, factorielles.

Dans le paragraphe 3.2.2, on a donné des propriétés sur les sommes finies dans $\mathbb{K}$. De manière similaire, on peut traiter les produits finis dans $\mathbb{K}$. On pourrait obtenir un pendant pour chaque propriété sur les sommes. On se contente ici de donner une notation pour les produits finis, de justifier proprement la suite des puissances d'un nombre et d'introduire la suite des factorielles.

Proposition 3.11. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $\pi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\pi_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D \,, \quad \pi_{n+1} = \pi_n \cdot u_{n+1} \,. \tag{3.17}$$

Preuve : Il suffit de remplacer la somme $+$ de $\mathbb{K}$ par le produit $\cdot$ de $\mathbb{K}$ dans la preuve de la proposition 3.6 pour obtenir une preuve de la proposition 3.11. $\square$

Comme au paragraphe 3.2.2, on pourrait donner un nom à cette suite π. On se contente de définir une notation pour les produits finis :

Définition 3.12. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On considère la suite π construite dans la proposition 3.11. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite π, qui sont des produits : pour $n \in D$, on pose :*

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \ := \ \prod_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \ := \ \prod_{n_0\leq k\leq n} u_k \ := \ \pi_n \, . \tag{3.18}$$

Le signe $\prod$ se dit "produit" ou bien "pi" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "pi"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice du produit. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \ := \ 1 \, .$$

Comme au paragraphe 3.2.2, on peut montrer des propriétés de ces produits finis qui sont similaires à celle des sommes finies que l'on a vues dans la proposition 3.9. On se contente de donner la définition des notions de "puissance" et de "factorielle".

Définition 3.13. *Puissances et factorielles.*
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite constante égale à a. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.11 pour cette suite u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a^n := \pi_n$ et on prononce "a puissance n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$a^n \ = \ \prod_{k=1}^{n} a \, .$$

Par **convention**, *on pose $a^0 = 1$.*
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite réelle donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.11 avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! := \pi_n$ et on prononce "factorielle n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$n! \ = \ \prod_{k=1}^{n} k \, .$$

Par **convention**, *on pose $0! = 1$.*

On peut montrer par récurrence que la suite réelle $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

3.3 Propriétés des suites.

Dans cette partie, on donne des propriétés générales des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Des propriétés spécifiques aux suites réelles seront aussi mentionnées. On introduit enfin la notion de sous-suite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.3.1 Propriétés générales.

Une première propriété importante des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) réside dans le fait que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des lois de compositions appropriées que l'on donne maintenant.

Définition 3.14. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n + v_n$. La suite w est la somme des suites u et v et est notée $w = u + v$.
On définit une nouvelle suite $x : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $x_n = \lambda \cdot u_n$. La suite x est le produit de la suite u par le scalaire λ et est notée λu ou $\lambda \cdot u$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D$, $u_n = c$.
La suite nulle sur D est la suite constante égale à 0 sur D.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) à partir du rang N s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n = c$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, pour laquelle il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit constante (sur D) à partir du rang N, est dite stationnaire.

Par exemple $2((1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = (2/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La somme des suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, données par $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(1/n)$, est la suite nulle sur $\mathbb{N}^*$ puisque, pour tout $n > 0$,

$$u_n + v_n = \ln(n) + \ln(1/n) = \ln(n) - \ln(n) = 0\,.$$

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^D$, alors qu'elles sont différentes.

Proposition 3.15. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}^D$ des suites définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 3.14, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$, on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. On voit que la suite nulle sur D est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. Toute suite $u \in \mathbb{K}^D$ admet comme suite opposée la suite $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $n \in D$, $v_n = -u_n$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)\,,\ (\lambda + \mu)\,a = \lambda a + \mu a\,,\ \lambda\,(a + b) = \lambda a + \lambda b\,,\ 1 \cdot a = a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u; v) \in (\mathbb{K}^D)^2$,

$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)\,,\ (\lambda + \mu)\,u = \lambda u + \mu u\,,\ \lambda\,(u + v) = \lambda u + \lambda v\,,\ 1 \cdot u = u\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^D$ muni des lois de la définition 3.14 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour $m \in D$, on considère la suite $e^{(m)} : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $e_n^{(m)} = 1$ si $n = m$ et $e_n^{(m)} = 0$ si $n \neq m$.

Proposition 3.16. *La famille $(e^{(m)})_{m\in D}$ est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^D$. En particulier, la dimension de l'espace est infinie.*

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1; \cdots; i_p) \in D^p$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $(\lambda_1; \cdots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} = 0$$

dans $\mathbb{K}^D$. Donc, pour $j \in [\![1; p]\!]$, on a, en prenant la valeur en i_j de la suite nulle,

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)}\right)_{i_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e_{i_j}^{(i_k)} = \lambda_j\,.$$

On a montré que la famille est libre. □

Hors programme.

Remarque 3.17. *Les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ (vus dans le cours d'Algèbre 2) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^D$ (pour les lois de la définition 3.14).*

On introduit aussi le produit de deux suites.

Définition 3.18. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$.
Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Le produit de u par v est la suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n \cdot v_n$. On note w par uv ou $u \cdot v$.*

On remarque que, si $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$, cu peut être vu comme le produit de u par le scalaire c ou bien comme le produit de la suite u avec la suite constante égale à c.

On définit aussi le module ou la valeur absolue d'une suite.

Définition 3.19. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On note par $|u|$ la suite réelle $(|u_n|)_{n\in D}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|u|$ est la suite "module de u" et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|u|$ est la suite "valeur absolue de u".*

Pour terminer ce paragraphe, donnons la définition de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une suite complexe. On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Définition 3.20. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Les suites réelles $\Re(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in D$, $(\Re(u))_n = \Re(u_n)$ et $(\Im(u))_n = \Im(u_n)$, sont appelées respectivement partie réelle de u et partie imaginaire de u.*

3.3.2 Propriétés propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.21. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle.
On dit que u est croissante si*

$$\forall (n;m) \in D^2 \, , \, \Big((n \leq m) \implies (u_n \leq u_m) \Big) \, .$$

On dit que u est strictement croissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \, , \, \Big((n < m) \implies (u_n < u_m) \Big) \, .$$

On dit que u est décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \, , \, \Big((n \leq m) \implies (u_n \geq u_m) \Big) \, .$$

On dit que u est strictement décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \, , \, \Big((n < m) \implies (u_n > u_m) \Big) \, .$$

*On dit que u est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.*

*Soit $N \in \mathbb{N}$.
On dit que u est croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est croissante.
On dit que u est strictement croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est*

strictement croissante.
On dit que u est décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est décroissante.
On dit que u est strictement décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est strictement décroissante.
On dit que u est monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est monotone.
On dit que u est strictement monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est strictement monotone.

On dit que u est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit croissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement croissante à partir du rang N.
On dit que u est décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit décroissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement décroissante à partir du rang N.
On dit que u est monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit monotone à partir du rang N.
On dit que u est strictement monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement monotone à partir du rang N.

Voyons quelques exemples. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est aussi strictement croissante. La suite constante égale à 1 est croissante, mais aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et aussi strictement décroissante.

On peut vérifier que la suite $(n^2-4n+4)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 2022. Elle l'est aussi à partir du rang 2. Elle ne l'est pas à partir du rang 1. Cette suite est donc croissante à partir d'un certain rang. En fait, on peut vérifier qu'elle est strictement croissante à partir du rang 2. Elle est donc strictement croissante à partir d'un certain rang.

Contrairement aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose, pour repérer les suites monotones, de la proposition suivante.

Proposition 3.22. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : [\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\big(u \text{ est croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \geq u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est strictement croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} > u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \leq u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est strictement décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} < u_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Preuve : On montre seulement la première équivalence. Les autres peuvent être démontrées de manière similaire.
$\Longrightarrow$) : On suppose que u est croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la croissance de u, $u_{n+1} \geq u_n$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. On montre que u est croissante. Pour ce faire, on montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \big(\forall p \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \geq u_p\big)\,.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, car, pour tout $p \geq n_0$, on a $u_{p+0} = u_p \geq u_p$. Supposons que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq n_0$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $u_{p+q+1} = u_{(p+1)+q} \geq u_{p+1}$. D'après l'hypothèse, $u_{p+1} \geq u_p$. Donc $u_{p+q+1} \geq u_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq n_0$, $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Soit $(m;n) \in [\![n_0;+\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{P}(m-n)$ est vraie, on a $u_m = u_{n+(m-n)} \geq u_n$. On a montré que u est croissante. $\square$

Définition 3.23. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que u est majorée par a si a majore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \leq a$.
On dit que u est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit majorée par b.
On dit que u est minorée par a si a minore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \geq a$.
On dit que u est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit minorée par b.
On dit que u est bornée si u est majorée et u est minorée.
Lorsqu'une suite est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une suite est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, donc positive. On peut vérifier qu'elle n'est pas majorée. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi minorée par 0. Elle est majorée par 2022. Elle est aussi majorée par 1.

À lire.

On peut bien sûr définir le fait qu'une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ soit majorée à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit qu'elle est majorée à partir du rang N s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N;+\infty[\![$, $u_n \leq a$. Mais cette propriété n'est pas très utile car, dans ce cas, la suite est majorée, tout court.
Vérifions ce point. Prenons donc une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est majorée à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Il existe donc un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N;+\infty[\![$, $u_n \leq a$. Par la proposition 1.13, l'ensemble $[\![0;N]\!] \cap D$ est fini. Donc son image par u est aussi finie. Par la proposition 1.12, elle admet un maximum m. Soit $b = \max(a;m)$. Soit $n \in D$. Si $n \leq N$, $n \in D \cap [\![0;N]\!]$, donc $u_n \leq m \leq b$. Si $n > N$ alors, par l'hypothèse, $u_n \leq a \leq b$. Donc b majore u et u est majorée.

Pour terminer, on donne une caractérisation très utile de la bornitude avec la valeur absolue.

Proposition 3.24. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big((u \text{ est bornée}) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad |u_n| \leq m\big) \Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose u bornée. Il existe donc $(m_-;m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in D$, $m_- \leq u_n \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|;|m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $n \in D$. On a $u_n \leq m_+ \leq m$ et $-u_n \leq -m_- \leq m$, donc $|u_n| = \max(u_n;-u_n) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D$, $|u_n| \leq m$ soit $u_n \in I(0;m]$. Par la proposition 2.7 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $n \in D$, $-m \leq u_n \leq m$. Donc u est majorée par m et minorée par $-m$. Elle est donc bornée. $\square$

3.3.3 Sous-suites.

On revient dans le cadre général des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 3.25. *On appelle extractrice une suite strictement croissante définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

Les suites $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n+1$, sont des extractrices. La suite $\varphi_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\varphi_3(n) = n^2 - 4n + 4$ n'est pas une extractrice car $\varphi_3(0) = 4 > 1 = \varphi_3(1)$. Mais on peut vérifier que sa restriction à $[\![2;+\infty[\![$ en est une. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante mais elle n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. Ce n'est donc pas une extractrice. Cependant, si l'on pose $D' = \{p^2; p \in \mathbb{N}\}$, D' est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$ et la suite $\varphi_4 : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D'$, $\varphi_4(n) = \sqrt{n}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est strictement croissante. C'est donc une extractrice.

Définition 3.26. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Une sous-suite de u est la composée de u par une extractrice, c'est-à-dire une suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle qu'il existe une extratrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$.*
Une sous-suite de u est aussi appelée suite extraite de u.

Pour $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de u puisqu'elles sont $u \circ \varphi_1$ et $u\circ\varphi_2$ respectivement, pour les extractrices φ_1 et φ_2 vues plus haut. Si $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (1/(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors y est une sous-suite de x car $y = x \circ \psi$, où $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, définie par $\psi(n) = 2n$, est strictement croissante. Soit $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)} \,.$$

Soit $v = ((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $2(2p+1) \notin 4\mathbb{N}$ car $2p+1 \notin 2\mathbb{N}$, et

$$u_{2(2p+1)} \;=\; \frac{1}{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{\sin\left(p\pi \,+\, \frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{(-1)^p} \;=\; (-1)^p \,.$$

On voit que v est une sous-suite de u car $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$, donnée par $\varphi(p) = 2(2p+1)$, est strictement croissante.

Voyons maintenant une façon plus intuitive de construire des sous-suites d'une suite donnée. Prenons une suite réelle $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, on veut contruire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, mais sans les deux premiers termes de u. On peut prendre $v^{(0)} : [\![3;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ et $v^{(0)}_n = u_n$, pour $n \geq 3$. On peut aussi prendre $v^{(1)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(1)}_n = u_{n+3}$. Peut-on construire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, sans une infinité des termes de u ? Oui, on peut par exemple retirer tous les termes d'incide pair. On peut prendre $v^{(2)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(2)}_n = u_{2n+1}$. A-t-on, dans tous les cas, construit une sous-suite de u au sens de la définition 3.26 ? Oui, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 3.27. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Soit D_0 une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui est incluse dans D.*
Pour toute partie infinie D' de $\mathbb{N}$, il existe une sous-suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ de u telle que l'ensemble des termes de v sont, dans le même ordre, ceux de la restriction de u à D_0, c'est-à-dire telle que

$$v(D') \;:=\; \{v_p \,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n \,;\; n \in D_0\} \;=:\; u(D_0)$$

et telle qu'on ait

$$\Big(\forall\, (p;q) \in (D')^2\,,\quad (p \leq q) \;\Longrightarrow \big(\exists\, (n;m) \in D_0^2\,;\quad (n \,\leq\, m) \quad et \quad (u_n \,=\, v_p) \quad et \quad (u_m \,=\, v_q)\big)\Big)\,.$$

Encore une fois, nous sommes confrontés à la difficulté signalée dans la remarque 3.3. Pour démontrer cette proposition, on établit d'abord deux résultats préliminaires. On va utiliser des propriétés des bijections rappelées dans le paragraphe 1.1 (voir aussi le paragraphe 7.1).

Lemme 3.28. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe une suite strictement croissante $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ dont l'image $v(\mathbb{N}^*)$ est exactement D. En particulier, v est bijective.*

Hors programme.

Preuve : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition suivante :
Il existe p applications $v^{(j)}$, pour $j \in [\![1;p]\!]$, telle que, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $v^{(j)} : [\![1;j]\!] \longrightarrow D$ avec $v_1^{(j)} = \min D$ et, si $j > 1$, la restriction de $v^{(j)}$ à $[\![1;j-1]\!]$ est $v^{(j-1)}$ et $v_j^{(j)} = \min(D \setminus \operatorname{Im} v^{(j-1)}) > v_{j-1}^{(j-1)}$, où $\operatorname{Im} v^{(j-1)}$ désigne l'image de $v^{(j-1)}$.
En choisissant $v^{(1)} : [\![1;1]\!] \longrightarrow D$ donnée par $v_1^{(j)} = \min D'$, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $v^{(p+1)} : [\![1;p+1]\!] \longrightarrow D$ l'application dont la restriction à $[\![1;p]\!]$ est donnée par $v^{(p)}$ (celle fournie par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$) et dont la valeur en $p+1$ est $v_{p+1}^{(p+1)} = \min(D \setminus \operatorname{Im} v^{(p)})$. Cette application $v^{(p+1)}$ est bien définie car, d'une part, par la proposition 1.13, $D \setminus \operatorname{Im} v^{(p)}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et, d'autre part, encore par la proposition 1.13, $D \setminus \operatorname{Im} v^{(p)}$ a un plus petit élément. De plus, comme $v_p^{(p)} \in \operatorname{Im} v^{(p)}$, on a nécessairement $v_{p+1}^{(p+1)} > v_p^{(p)}$.
Vérifions maintenant qu'en prenant les applications $v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}$ fournies par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ et l'application $v^{(p+1)}$ que l'on vient de construire, la proposition $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $v_1^{(j)} = \min D$ puisque c'est le cas pour $j \leq p$, d'après $\mathcal{P}(p)$, et $v_1^{(p+1)} = v_1^{(p)} = \min D$, par $\mathcal{P}(p)$ aussi. Prenons $j \in [\![1;p]\!]$. D'après $\mathcal{P}(p)$, la restriction de $v^{(j)}$ à $[\![1;j-1]\!]$ est $v^{(j-1)}$ et $v_j^{(j)} = \min(D' \setminus \operatorname{Im} v^{(j-1)}) > v_{j-1}^{(j-1)}$. Prenons enfin $j = p+1$. Par construction, la restriction de $v^{(p+1)}$ à $[\![1;(p+1)-1]\!]$ est $v^{((p+1)-1)}$ et $v_{p+1}^{(p+1)} = \min(D' \setminus \operatorname{Im} v^{((p+1)-1)}) > v_p^{(p)}$. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ donnée par $v_p = v_p^{(p)}$ est donc bien définie. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{p+1} = v_{p+1}^{(p+1)} > v_p^{(p)} = v_p$, d'après $\mathcal{P}(p+1)$. Donc v est strictement croissante (cf. proposition 3.22).
Montrons que $v(\mathbb{N}^*) = D$.
Par construction, on sait déjà que $v(\mathbb{N}^*) \subset D$. Supposons qu'il existe $d \in D$ tel que $d \notin v(\mathbb{N}^*)$. Comme D est infinie, la partie $\{n \in \mathbb{N}^*; v_n > d\}$ est non vide donc elle admet un plus petit élement j (cf. proposition 1.13). Comme $d \geq \min D = v_0$, on a forcément $j > 0$. Si $v_{j-1} > d$, on aurait $j-1 \in \{n \in \mathbb{N}^*; v_n > d\}$ avec $j-1 < j$ et cela contredirait le fait que $j = \min\{n \in \mathbb{N}^*; v_n > d\}$. Donc $v_{j-1} \leq d$ et, comme $d \notin v(\mathbb{N}^*)$, $d \neq v_{j-1}$ Donc $v_{j-1} < d < v_j$. En particulier, $d \in D \setminus \{v_1; \cdots; v_{j-1}\} = D \setminus \operatorname{Im} v^{(j-1)}$ donc on a $d \geq \min(D \setminus \operatorname{Im} v^{(j-1)}) = v_j^{(j)} = v_j$. Contradiction puisqu'on a établi que $d < v_j$. On a donc montré que $D \subset v(\mathbb{N}^*)$. D'où $D = v(\mathbb{N}^*)$ et v est donc surjective.
Il reste à voir que v est injective. Soit $(n;n') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $v_n = v_{n'}$. Si $n < n'$ alors, comme v est strictement croissante, $v_n < v_{n'}$, contradiction. Si $n > n'$ alors, comme v est strictement croissante, $v_n > v_{n'}$, contradiction. Donc, nécessairement, $n = n'$. On a montré que v est injective. □

Lemme 3.29. *Soit D et D' deux parties infinies de $\mathbb{N}$. Il existe une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D$.*

Preuve : On applique le lemme 3.28 à D et à D'. Il existe donc deux bijections strictement croissantes $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ telles que $v(\mathbb{N}^*) = D$ et $w(\mathbb{N}^*) = D'$. La bijection réciproque $w^{\langle -1 \rangle}$ de w est aussi strictement croissante.
En effet, prenons $(n;n') \in (D')^2$ avec $n < n'$ et posons $p = w^{\langle -1 \rangle}(n) \in \mathbb{N}^*$ et $p' = w^{\langle -1 \rangle}(n') \in \mathbb{N}^*$. Si l'on avait $p \geq p'$, on aurait, comme w est croissante, $w(p) \geq w(p')$ soit $n = w(p) \geq w(p') = n'$ ce qui contredit $n < n'$. Donc, forcément, $p < p'$ soit $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$.
Soit $\varphi := v \circ w^{\langle -1 \rangle}$. φ est donc bijective de D' sur D, comme composée de bijections. Vérifions que φ est strictement croissante. Soit $(n;n') \in (D')^2$ avec $n < n'$. Comme $w^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante, on a $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$. Comme v est strictement croissante, on a $v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n'))$. D'où $\varphi(n) = v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n')) = \varphi(n')$. □

Preuve de la proposition 3.27. : On applique le lemme 3.29 avec $(D;D')$ remplacé par $(D_0;D')$. Il existe donc une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D_0$. On pose $v = u \circ \varphi$. v est bien définie car l'image $\varphi(D')$ de D' par φ est incluse dans D, le domaine de définition de u. Comme φ est une extractrice, v est une sous-suite de u, par la définition 3.26. De plus, comme φ est une bijection de D' sur D_0,

$$v(D') = \{v_p \,;\, p \in D'\} = \{u_{\varphi(p)} \,;\, p \in D'\} = \{u_n \,;\, n \in \varphi(D')\} = \{u_n \,;\, n \in D_0\} = u(D_0)\,.$$

Soit maintenant $(p;q) \in (D')^2$ avec $p \leq q$. Soit $n = \varphi(p)$ et $m = \varphi(q)$. Comme φ est strictement croissante,

Hors programme.