Université de Cergy-Pontoise.

L3M, Contrôle continu de calcul intégral, 2 décembre 2019 (55 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (8 pts). Vérifier que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont mesurables (relativement à la tribu borélienne) et déterminer celles qui sont intégrables pour la mesure de Lebesgue.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1+|x|)^{-2}\,, \\ f_2(x) &= x^{-2}\cos(x)\cdot \mathbb{1}_{\{t\in\mathbb{R};|t|\geq 1\}}(x) \,+\, x^{-1}\sin(x)\cdot \mathbb{1}_{\{t\in\mathbb{R};|t|<1\}}(x)\,, \\ f_3(x) &= x^{-1}\cdot \mathbb{1}_{\{t\in\mathbb{R};\,0<|t|<1\}}(x)\,. \end{aligned}$$

Exercice 2. : (10 pts). Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu sur Ω formée des parties de Ω. Soit $\mu:\mathcal{T}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure du décompte sur Ω, c'est-à-dire l'application qui, à une partie A de Ω associe le nombre d'éléments de A. Pour $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, soit V_f l'ensemble des valeurs prises par f.
On note par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que toute fonction $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On suppose que Ω est un ensemble fini. Montrer que toute fonction $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^+$ est étagée et μ-intégrable.
3. Montrer que, pour f positive et pour tout $r\geq 0$, $r\cdot\mu\big(\{f\geq r\}\big)\leq\int f\,d\mu$.
4. Soit $c>0$ et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une fonction qui prend une infinité de fois une valeur supérieure ou égale à c. Montrer que f n'est pas μ-intégrable.
5. On suppose que $\Omega=\mathbb{R}$. Trouver une fonction μ-intégrable $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telle que l'ensemble $\{g>0\}$ soit infini.
6. On suppose que $\Omega=\mathbb{R}$. Trouver une fonction $h:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telle que l'ensemble $\{h>0\}$ soit au plus dénombrable et telle que h n'est pas μ-intégrable.

TOURNEZ SVP.

Exercice 3. : (4 pts). Vrai ou faux. Répondre **sans justification**. $-0{,}25$ point par réponse fausse, 0,5 point par réponse juste, 0 point pour l'absence de réponse. Mais la note minimale à l'exercice sera 0.

Notations : On note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On considère un ensemble non vide Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω.

1. Pour tout mesure positive $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ et tout $(A; B) \in \mathcal{T}^2$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissantes d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure positive. Alors
$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n\big)\,.$$

3. Il existe une fonction μ-intégrable $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ telle que $\mu(\{f = +\infty\}) > 0$.

4. Une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

5. On a
$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left](-1)^n - n^{-2}; (-1)^n + n^{-2}\right[\right) \;=\; \frac{5}{2}\,.$$

6. On a
$$\int \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\, d\lambda(x) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{\{t\in\mathbb{R};\epsilon\le|t|\le 1\}}(x)\, d\lambda(x) \;=\; 0\,.$$

7. Une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}$ a une mesure de Lebesgue finie.

8. Pour toute fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui est λ-intégrable,
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \;<\; +\infty\,.$$

Fin de l'épreuve.