Préliminaires et rappels.

Exercice 1. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Montrer que $(a+b)/2 \in [a;b]$.
2. Montrer que, si $(a+b)/2 = a$ ou $(a+b)/2 = b$, alors $a = b$.

En particulier, si $a < b$, on a $(a+b)/2 \in]a;b[$.

Exercice 2. : Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer les 4 implications suivantes :

$$\big(a \leq b \leq c \leq d\big) \implies \big(0 \leq c-b \leq d-a\big)\,,\ \big(a < b \leq c \leq d\big) \implies \big(0 \leq c-b < d-a\big)\,,$$

$$\big(a \leq b < c \leq d\big) \implies \big(0 < c-b \leq d-a\big)\,,\ \big(a \leq b \leq c < d\big) \implies \big(0 \leq c-b < d-a\big)\,.$$

Exercice 3. : Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $3x+2=0$. On note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. Déterminer $\mathcal{S}$ en utilisant une suite d'équivalence.
2. Déterminer $\mathcal{S}$ sans utiliser les signes "$\Longrightarrow$" et "$\Longleftrightarrow$". On pourra cependant citer et appliquer des résultats du cours contenant l'un de ses signes.

Exercice 4. : Sans utiliser les signes "$\Longrightarrow$" et "$\Longleftrightarrow$" (on pourra cependant citer et appliquer des résultats du cours contenant l'un de ses signes), montrer que les propositions suivantes sont vraies.

$$\mathcal{P} = \big(\forall\, x \in [-1;+\infty[\,,\, x+3 \geq 0\big)\,,\quad \mathcal{Q} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, x^2 \geq 0\big)\,,$$

$$\mathcal{R} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, \exists\, y \in \mathbb{R}^+\,;\ y > x\big)\,,\quad \mathcal{S} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,,\, \exists\, y \in \mathbb{R}^{+*}\,;\ y < x\big)\,,$$

$$\mathcal{T} = \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, \big((\forall\, \epsilon > 0\,,\, x \leq \epsilon) \implies x \leq 0\big)\Big)\,,$$

$$\mathcal{U} = \Big(\forall\, L > 0\,,\, \exists\, A > 0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, (x > A \implies 2x+3 > L)\Big)\,.$$

Exercice 5. : Soit cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction cosinus. On considère les propositions :

$$\mathcal{P} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ -1\ <\ \cos(x)\ <\ 1\big)\,, \quad \mathcal{Q}\ =\ \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \cos(x)\ \in\ [-1;1]\big)$$

$$\text{et}\quad \mathcal{R}\ =\ \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,, 0\ \leq\ (\cos(x))^2\ \leq\ 1\big)\,.$$

1. Montrer que l'implication ($\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$) est vraie.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est fausse.
3. Montrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.
4. Montrer que l'implication ($\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}$) est vraie.
5. Que peut-on dire de la validité de $\mathcal{R}$?

On remarque que le résultat du 2 redonne celui du 1 mais ne dit rien sur la validité de $\mathcal{Q}$.

Exercice 6. : Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ données par : a). $x^2 = -3$; b). $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x - 1)^{-1} = 4x - 6$; c). $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x - 1)^{-1} = -x + 1$.

Exercice 7. : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x \in I$. Montrer qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x < x_2$. (Indication : on pourra traiter séparément les différents types d'intervalle ouvert.)

Exercice 8. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que m et m' soient des plus grands éléments de A. Montrer que $m = m'$.

Exercice 9. : On justifiera toute réponse. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$A\ :=\ \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}\,,\ -A\ :=\ \{-1/n; n \in \mathbb{N}^*\}\quad \text{et}\quad B\ :=\ \{n \in \mathbb{N}; -n^2 + 5n - 4 \geq 0\}\,.$$

1. Déterminer la borne supérieure de $[-2; 7]$.
2. Déterminer la borne supérieure de $[0; 2[$.
3. Vérifier que l'intervalle $]0; 7[$ est minoré mais n'a pas de plus petit élément.
4. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.
5. Déterminer la borne supérieure de $\mathbb{Z}$.
6. Montrer que A n'a pas de plus petit élément.
7. Déterminer la borne supérieure de A.

8. Déterminer la borne supérieure de $-A$.

9. Déterminer la borne supérieure de $(-A) \cup [0;2[$.

10. Déterminer la borne supérieure de B. Est-ce un maximum ?

Exercice 10. : Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On veut montrer que $\sup A \leq \sup B$.
Lorsque B n'est pas majorée, c'est-à-dire quand $\sup B = +\infty$, ce résultat est vrai car on a toujours $\sup A \leq +\infty$.
On traite maintenant le cas où B est majorée.

1. Montrer que $\sup B$ est un majorant réel de A.

2. En déduire que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 11. : Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A\,,\, \exists b \in B\,;\ a\ \leq\ b\,. \tag{1}$$

1. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

2. Donner un exemple de parties A et B disjointes vérifiant (1).

3. Donner un exemple de parties A et B disjointes vérifiant (1) et $\inf B < \sup A$.

4. Donner un exemple de parties A et B vérifiant $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$ et (1).

Exercice 12. : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties non vides A de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

$$\forall\,(x;y) \in A^2\,,\quad \big([x;y]\ \subset\ A \quad \text{et} \quad [y;x]\ \subset\ A\big)\,.$$

1. Vérifier que les intervalles non vides de $\mathbb{R}$ satisfont la propriété $\mathcal{P}$.

2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui satisfait la propriété $\mathcal{P}$. Montrer que $]\inf A;\sup A[\subset A$. En déduire que A est l'un des intervalles : $]\inf A;\sup A[$, $]\inf A;\sup A]$, $[\inf A;\sup A[$, $[\inf A;\sup A]$.

Exercice 13. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b - a > 1$. Le but de l'exercice est de montrer que $]a;b[\cap\mathbb{Z}$ est non vide, autrement dit que l'intervalle $]a;b[$ contient un entier relatif.

1. Vérifier que $(11/3) - (13/7) > 1$. Trouver un nombre entier dans $]13/7\,;\,11/3[$.

2. On suppose $a \geq 0$. Soit
$$A \ := \ \{p \in \mathbb{Z}\,;\ p > a\} \ = \ \{p \in \mathbb{N}\,;\ p > a\}\,.$$
Montrer que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

3. Par le cours, A admet un plus petit élément noté $p_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $p_0 \in]a; b[$.

4. On ne suppose plus que $a \geq 0$. Pourquoi existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |a|$?

5. Montrer que $]a+N; b+N[$ contient un entier naturel. En déduire que $]a; b[$ contient un entier relatif.

Exercice 14. : On construit ici la fonction partie entière. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$A_x \ := \ \{p \in \mathbb{Z}\,;\ p \leq x\} \quad \text{et} \quad E(x) \ := \ \sup A_x\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier le fait que $E(x) \in \mathbb{R}$ et que $E(x) \leq x$.

2. Montrer que l'ensemble
$$B_x \ = \ \{p \in \mathbb{Z}\,;\ E(x) - 2 < p \leq x\}$$
est non vide et fini. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 13.)

3. Vérifier que $\sup B_x \leq E(x)$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 10.)

4. Montrer que $E(x) = \sup B_x$.

5. En déduire que $E(x) \in \mathbb{Z}$.

6. Montrer que $x < E(x) + 1$. (Indication : on pourra faire une preuve par l'absurde.)

La fonction partie entière est la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe le $E(x)$ défini plus haut. Elle vérifie donc la propriété
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad E(x) \ \leq \ x \ < \ E(x) \ + \ 1\,. \tag{2}$$
Une autre construction de la fonction partie entière est donnée dans les compléments du cours. En particulier, il y est montré que E est la seule fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant (2) avec E remplacée par f.

Exercice 15. : Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \geq 4n$.

Exercice 16. : Déterminer l'ensemble D des entiers naturels n pour lesquels $2^n \geq 2n+1$.

Exercice 17. : Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le cardinal de l'ensemble $[\![2^n; 2^{n+1}]\!] := [2^n; 2^{n+1}] \cap \mathbb{N}$.

Exercice 18. : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![2; \infty[\![$, déterminer le cardinal de l'ensemble $[\![p^n; p^{n+1}]\!] := [p^n; p^{n+1}] \cap \mathbb{N}$.

Exercice 19. : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
$$\mathcal{P} = \left(\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ 2^{(3^n)} \ = \ \left(2^3\right)^n\right)\,, \quad \mathcal{Q} \ = \ \left(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ 2^{(3^n)} \ = \ \left(2^3\right)^n\right)\,.$$