Préliminaires et rappels.

On rappelle quelques propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. On pose $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3 \,,\ \big(a + c = b + c \iff a = b\big) \,, \tag{1}$$
$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3 \,,\ a \cdot (b + c) \ = \ (a \cdot b) \ + \ (a \cdot c) \,, \tag{2}$$
$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3 \,,\ \big(a = b \implies a \cdot c = b \cdot c\big) \,, \tag{3}$$
$$\forall (a;b) \in \mathbb{K}^2 \,,\ \forall c \in \mathbb{K}^* \,,\ \big(a \cdot c = b \cdot c \iff a = b\big) \,. \tag{4}$$

On rappelle quelques propriétés de la relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \,,\quad \big((a \leq b) \text{ ou } (b \leq a)\big) \,, \tag{5}$$
$$\forall\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \,,\quad \Big(\big((a \leq b) \text{ et } (b \leq a)\big) \implies (a = b)\Big) \,, \tag{6}$$
$$\forall\, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \,,\quad \Big(\big(a \,+\, c \,\leq\, b \,+\, c\big) \iff \big(a \,\leq\, b\big)\Big) \,, \tag{7}$$
$$\forall\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \,, \forall\, c > 0 \,,\quad \Big(\big(a \,\cdot\, c \,\leq\, b \,\cdot\, c\big) \iff \big(a \,\leq\, b\big)\Big) \,, \tag{8}$$
$$\forall\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \,,\quad \Big(\big(-a \,\leq\, -b\big) \iff \big(b \,\leq\, a\big)\Big) \,. \tag{9}$$

Pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, la proposition $(a < b)$ est par définition la proposition

$$\big(\,(a \,\leq\, b) \quad \text{et} \quad (a \,\neq\, b)\,\big) \,.$$

Exercice 1. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Montrer que $(a + b)/2 \in [a;b]$.
2. Montrer que, si $(a + b)/2 = a$ ou $(a + b)/2 = b$, alors $a = b$.

En particulier, si $a < b$, on a $(a + b)/2 \,\in\,]a;b[$.

Exercice 2. : Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer les 4 implications suivantes :

$$\big(a \leq b \leq c \leq d\big) \implies \big(0 \leq c - b \leq d - a\big) \,,\ \big(a < b \leq c \leq d\big) \implies \big(0 \leq c - b < d - a\big) \,,$$
$$\big(a \leq b < c \leq d\big) \implies \big(0 < c - b \leq d - a\big) \,,\ \big(a \leq b \leq c < d\big) \implies \big(0 \leq c - b < d - a\big) \,.$$

Exercice 3. : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. On rappelle que les ensembles $I(x_0; r[$ et $I(x_0; r]$ sont définis par

$$I(x_0; r[:= \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x - x_0| < r\right\} \quad \text{et} \quad I(x_0; r[:= \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x - x_0| \leq r\right\}.$$

1. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence

$$\big(|x - x_0| < r\big) \iff \big(x \in]x_0 - r; x_0 + r[\big).$$

2. En déduire que $I(x_0; r[=]x_0 - r; x_0 + r[$.

3. Soit $y \in I$. Montrer qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < y < x_2$.
(Indication : on pourra considérer séparément les différents types d'intervalle.)

En remplaçant, dans la réponse aux questions 1 et 2, chaque inégalité stricte "$<$" par une inégalité large "$\leq$", on montre de même que $I(x_0; r] = [x_0 - r; x_0 + r]$ et l'équivalence

$$\big(|x - x_0| \leq r\big) \iff \big(x \in [x_0 - r; x_0 + r]\big).$$

Exercice 4. : Soit (E) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $3x + 2 = 0$. On note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. Déterminer $\mathcal{S}$ en utilisant une suite d'équivalences.

2. Déterminer $\mathcal{S}$ sans utiliser les signes "$\Longrightarrow$" et "$\Longleftrightarrow$". On pourra cependant citer et appliquer des résultats du cours contenant l'un de ses signes.

Exercice 5. : Sans utiliser les signes "$\Longrightarrow$" et "$\Longleftrightarrow$" (on pourra cependant citer et appliquer des résultats du cours contenant l'un de ses signes), montrer que les propositions suivantes sont vraies.

$$\mathcal{P} = \big(\forall\, x \in [-1; +\infty[\,,\ x + 3 \geq 0\big)\,, \quad \mathcal{Q} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 \geq 0\big)\,,$$

$$\mathcal{R} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, y \in \mathbb{R}^+\,;\ y > x\big)\,, \quad \mathcal{S} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,,\ \exists\, y \in \mathbb{R}^{+*}\,;\ y < x\big)\,,$$

$$\mathcal{T} = \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \big((\forall\, \epsilon > 0\,,\ x \leq \epsilon) \implies x \leq 0\big)\Big)\,,$$

$$\mathcal{U} = \Big(\forall\, L > 0\,,\ \exists\, A > 0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ (x > A \implies 2x + 3 > L)\Big)\,.$$

Exercice 6. : Soit $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction cosinus. On considère les propositions :

$$\mathcal{P} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ -1 < \cos(x) < 1\big)\,, \quad \mathcal{Q} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \cos(x) \in [-1; 1]\big)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{R} = \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq (\cos(x))^2 \leq 1\big)\,.$$

1. Montrer que l'implication ($\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$) est vraie.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est fausse.
3. Montrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.
4. Montrer que l'implication ($\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}$) est vraie.
5. Que peut-on dire de la validité de $\mathcal{R}$?

On remarque que le résultat du 2 redonne celui du 1 mais ne dit rien sur la validité de $\mathcal{Q}$.

Exercice 7. : Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ données par : a). $x^2 = -3$; b). $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x - 1)^{-1} = 4x - 6$; c). $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x - 1)^{-1} = -x + 1$.

Exercice 8. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que m et m' soient des plus grands éléments de A. Montrer que $m = m'$.

Exercice 9. : On justifiera toute réponse. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$A := \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}, \ -A := \{-1/n; n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad B := \{n \in \mathbb{N}; -n^2 + 5n - 4 \geq 0\}.$$

1. Déterminer la borne supérieure de $[-2; 7]$.
2. Déterminer la borne supérieure de $[0; 2[$.
3. Vérifier que l'intervalle $]0; 7[$ est minoré mais n'a pas de plus petit élément.
4. Montrer que A n'a pas de plus petit élément.
5. Déterminer la borne supérieure de A.
6. Déterminer la borne supérieure de $-A$.
7. Déterminer la borne supérieure de $(-A) \cup [0; 2[$.
8. Déterminer la borne supérieure de B. Est-ce un maximum ?
9. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré. Déterminer la borne supérieure de $\mathbb{Z}$.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$. En notant par E la fonction partie entière définie dans le cours, montrer que $E(x) = \sup\{p \in \mathbb{Z};\ p \leq x\}$.

Exercice 10. : Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On veut montrer que $\sup A \leq \sup B$.
Lorsque B n'est pas majorée, c'est-à-dire quand $\sup B = +\infty$, ce résultat est vrai car on a toujours $\sup A \leq +\infty$.
On traite maintenant le cas où B est majorée.

1. Montrer que $\sup B$ est un majorant réel de A.
2. En déduire que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 11. : Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, a \in A\,,\ \exists\, b \in B\,;\ a \ \leq\ b\,. \tag{10}$$

1. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
2. Donner un exemple de parties A et B disjointes vérifiant (10).
3. Donner un exemple de parties A et B disjointes vérifiant (10) et $\inf B < \sup A$.
4. Donner un exemple de parties A et B vérifiant $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$ et (10).

Exercice 12. : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties non vides A de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

$$\forall\,(x;y) \in A^2\,,\quad \big([x;y]\ \subset\ A \quad \text{et} \quad [y;x]\ \subset\ A\big)\,.$$

1. Vérifier que les intervalles non vides de $\mathbb{R}$ satisfont la propriété $\mathcal{P}$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui satisfait la propriété $\mathcal{P}$. Montrer que $]\inf A; \sup A[\subset A$. En déduire que A est l'un des intervalles : $]\inf A; \sup A[$, $]\inf A; \sup A]$, $[\inf A; \sup A[$, $[\inf A; \sup A]$.

Exercice 13. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b - a > 1$. Le but de l'exercice est de montrer que $]a;b[\,\cap \mathbb{Z}$ est non vide, autrement dit que l'intervalle $]a;b[$ contient un entier relatif.

1. Vérifier que $(11/3) - (13/7) > 1$. Trouver un nombre entier dans $]13/7\,;\,11/3[$.
2. On suppose $a \geq 0$. Soit

   $$A\ :=\ \big\{p \in \mathbb{Z}\,;\ p\ >\ a\big\}\ =\ \big\{p \in \mathbb{N}\,;\ p\ >\ a\big\}\,.$$

   Montrer que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$.
3. Par le cours, A admet un plus petit élément noté $p_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $p_0 \in]a;b[$.
4. On ne suppose plus que $a \geq 0$. Pourquoi existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |a|$?
5. Montrer que $]a+N; b+N[$ contient un entier naturel. En déduire que $]a;b[$ contient un entier relatif.

Exercice 14. : On construit ici la fonction partie entière. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_x \ := \ \big\{p \in \mathbb{Z}\,;\ p \leq x\big\} \quad \text{et} \quad E(x) \ := \ \sup A_x\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que A_x est non vide.
   (Indication : on pourra utiliser la propriété d'Archimède.)
2. Montrer que $E(x) \in \mathbb{R}$ et que $E(x) \leq x$. Soit $B_x := A_x \cap]E(x) - 2; x]$.
3. Montrer que l'ensemble B_x est non vide.
   (Indication : on pourra appliquer l'exercice 13 à l'intervalle $]E(x) - 2; x[$.)
4. Montrer que $\sup B_x = E(x)$.
   (Indication : on pourra montrer $\sup B_x \leq \sup A_x$ et $\sup A_x \leq \sup B_x$.)
5. En déduire que $E(x) \in \mathbb{Z}$.
6. Montrer que $x < E(x) + 1$. (Indication : on pourra faire une preuve par l'absurde.)

La fonction partie entière est la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe le $E(x)$ défini plus haut. Elle vérifie donc la propriété

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad E(x) \ \leq \ x \ < \ E(x) \ + \ 1\,. \tag{11}$$

Une autre construction de la fonction partie entière est donnée dans les compléments du cours. En particulier, il y est montré que E est la seule fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant (11) avec E remplacée par f.

Exercice 15. : Soit $D = \{n \in \mathbb{N};\ 2^n \geq 2n + 1\}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \geq 4n$.
2. Déterminer explicitement D.

Exercice 16. : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![2; \infty[\![$, déterminer le cardinal de l'ensemble $[\![p^n; p^{n+1}]\!] := [p^n; p^{n+1}] \cap \mathbb{N}$.

Exercice 17. : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\mathcal{P} = \Big(\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ 2^{(3^n)} \ = \ \big(2^3\big)^n\Big)\,, \quad \mathcal{Q} \ = \ \Big(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ 2^{(3^n)} \ = \ \big(2^3\big)^n\Big)\,.$$