Hors programme.

Preuve : On applique le lemme 3.29 à D et à D'. Il existe donc deux bijections strictement croissantes $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ telles que $v(\mathbb{N}^*) = D$ et $w(\mathbb{N}^*) = D'$. La bijection réciproque $w^{\langle -1 \rangle}$ de w est aussi strictement croissante.
En effet, prenons $(n; n') \in (D')^2$ avec $n < n'$ et posons $p = w^{\langle -1 \rangle}(n) \in \mathbb{N}^*$ et $p' = w^{\langle -1 \rangle}(n') \in \mathbb{N}^*$. Si l'on avait $p \geq p'$, on aurait, comme w est croissante, $w(p) \geq w(p')$ soit $n = w(p) \geq w(p') = n'$ ce qui contredit $n < n'$. Donc, forcément, $p < p'$ soit $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$.
Soit $\varphi := v \circ w^{\langle -1 \rangle}$. φ est donc bijective de D' sur D, comme composée de bijections. Vérifions que φ est strictement croissante. Soit $(n; n') \in (D')^2$ avec $n < n'$. Comme $w^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante, on a $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$. Comme v est strictement croissante, on a $v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n'))$. D'où $\varphi(n) = v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n')) = \varphi(n')$. □

Preuve de la proposition 3.28. : On applique le lemme 3.30 avec $(D; D')$ remplacé par $(D_0; D')$. Il existe donc une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D_0$. On pose $v = u \circ \varphi$. v est bien définie car l'image $\varphi(D')$ de D' par φ est incluse dans D, le domaine de définition de u. Comme φ est une extractrice, v est une sous-suite de u, par la définition 3.27. De plus, comme φ est une bijection de D' sur D_0,

$$v(D') \;=\; \{v_p \,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_{\varphi(p)} \,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n \,;\; n \in \varphi(D')\} \;=\; \{u_n \,;\; n \in D_0\} \;=\; u(D_0)\,.$$

Soit maintenant $(p; q) \in (D')^2$ avec $p \leq q$. Soit $n = \varphi(p)$ et $m = \varphi(q)$. Comme φ est strictement croissante, elle est croissante donc $n \leq m$. De plus, par définition de v, on a $u_n = u_{\varphi(p)} = v_p$ et $u_m = u_{\varphi(q)} = v_q$. On a donc montré la proposition qui termine l'énoncé de la proposition 3.28. □

3.4 Limite d'une suite.

On introduit ici une notion de limite pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il s'agit, pour une suite $u = (u_n)_{n \in D}$ de donner un sens précis au fait éventuel que les termes de la suite s'approchent d'une limite lorsque n devient grand.
On donne tout d'abord une définition générale de la limite d'une suite. Ensuite, on se penche plus en détails sur le cas des limites finies pour les suites réelles et complexes puis sur celui de limite infinie pour les suites réelles seulement. Pour ces deux types de limites, on donne diverses propriétés.

3.4.1 Définition générale de limite d'une suite.

Commençons par introduire une définition générale. Pour les suites complexes, on n'envisagera que des limites finies (i.e. dans $\mathbb{C}$). Pour les suites réelles, on considèrera des limites finies (i.e. dans $\mathbb{R}$) mais aussi des limites infinies. Pour motiver ces dernières, considérons la suite $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. On voit que les termes deviennent de plus en plus grand et positif, quand n augmente. On a donc envie de dire que cette suite tend vers $+\infty$.

On définit ici la propriété intuitive que les termes de la suite u tendent vers une certaine limite ℓ lorsque n devient grand (lorsque "n tend vers l'infini"). De manière naturelle, on voudrait que cette définition soit telle que, si u a une limite, elle n'en a qu'une. D'autre part, il est raisonable d'imaginer des suites dont le comportement est "chaotique" et semble incompatible avec la notion intuitive de convergence vers une limite. On voudrait donc que la propriété d'avoir une limite ne soit pas commune à toutes les suites.

Pour établir cette définition, on va exploiter la notion de voisinage. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de voisinages complexes d'un point. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on utilise les voisinages réels d'un point ainsi que les voisinages réels de $+\infty$ et $-\infty$. À ce sujet, on a la remarque suivante.

Remarque 3.31. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{K}$, on sait, par les propositions 2.3 et 2.6, que l'intersection de deux voisinages de ℓ est un voisinage de ℓ et qu'une partie contenant un voisinage de ℓ est aussi un voisinage de ℓ. Il en est de même lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

De plus, dans les deux cas précédents, si $\ell \neq \ell'$ alors il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de ℓ' tel que $A \cap B = \emptyset$.
Enfin, si ℓ est finie alors tout voisinage de ℓ constient ℓ.

Définition 3.32. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de u si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.19}$$

On rappelle que $\mathcal{V}_\ell$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, ces voisinages sont définis dans la définition 2.2. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, ils sont définis dans la définition 2.5. Enfin, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, ils sont définis dans la définition 2.11.

On remarque que la proposition

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)$$

signifie que V contient tous les termes de la suite u à partir du rang N. La proposition (3.19) signifie donc que tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang.

Dans ce cadre général (et un peu abstrait), on est en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.33. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$.*
Si (3.19) est vraie et si (3.19), avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.
Si $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, qui coïncide avec u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n = v_n)\big)\,, \tag{3.20}$$

alors on a l'équivalence :

$$\big(\ell \text{ est limite de } u\big) \iff \big(\ell \text{ est limite de } v\big)\,. \tag{3.21}$$

Preuve :

a). On montre la première propriété par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la remarque 3.31, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de u, il existe, d'après (3.19), un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Comme ℓ' est limite de u, il existe, d'après (3.19), un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que B contienne tous les termes de u à partir du rang N_2. Comme D est infinie, il existe $n \in D$ tel que $n \geq \max(N_1; N_2)$ (cf. proposition 1.13). Comme $n \geq N_1$, $u_n \in A$. Comme $n \geq N_2$, $u_n \in B$. D'où $u_n \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. Donc $\ell = \ell'$.

b). On suppose (3.20) vraie pour un $N \in \mathbb{N}$ et on montre l'équivalence (3.21).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u$ existe et vaut ℓ. On montre (3.19) avec u remplacée par v. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse (cf. (3.19) pour u), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Soit $N_2 = \max(N; N_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_2$, on a, en utilisant d'abord le fait que $n \geq N$ puis le fait que $n \geq N_1$, $v_n = u_n \in V$. On a montré que $\ell = \lim v$.
$\Longleftarrow$) : Il suffit de reprendre l'argument précédent en échangeant les rôles de u et v. $\square$

La deuxième propriété montre ce que l'intuition suggérait : comme on s'intéresse à une propriété pour "n grand", rien n'est changé si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite considérée. On peut aussi dire que l'on ne change pas la nature d'une suite en changeant un nombre fini de ses termes.
Quant à la première propriété, elle permet de parler de "la" limite d'une suite, lorsqu'elle existe.

Définition 3.34. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
S'il existe ℓ tel que (3.19) est vraie, on dit que ℓ est la limite de u ou que u tend vers ℓ et on note

$$\ell = \lim u \quad ou \quad \ell = \lim_n u_n \quad ou \quad \ell = \lim_{n \to +\infty} u_n\,.$$

On dit que u est convergente, si elle admet une limite dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on dit aussi que u converge vers ℓ et que u est convergente vers ℓ.
Lorsque u n'admet pas de limite dans $\mathbb{K}$, on dit que u est divergente.

Attention : Il est important d'insister sur le fait qu'une suite peut ne pas avoir de limite. La proposition (3.19) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. C'est le cas, comme on le vérifie ci-dessous, de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une suite qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. "Étudier la limite d'une suite" signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

On verra plus loin plusieurs exemples de suites ayant une limite. Donnons ici un contre-exemple.
Soit $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée comme suite réelle. Son comportement oscillant laisse penser qu'elle n'a pas de limite. Elle semble ne pas se concentrer près d'une valeur, ni devenir "très positive", ni devenir "très négative". Montrons par l'absurde qu'elle n'a pas de limite.
Supposons que la limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ de x existe. Considérons la disjonction suivante de cas.
1er cas : $\ell \neq 1$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage réel A de ℓ et un voisinage réel B de 1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N$, $x_n = 1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
2ième cas : $\ell = 1$. Par la proposition 2.6 (ou la remarque 3.31), il existe un voisinage A de 1 et un voisinage B de -1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N + 1$, $x_n = -1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N + 1 \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
On a montré que x n'a pas de limite.

Il se trouve que l'on peut reformuler (3.19) en utilisant les voisinages dans D de $+\infty$ (cf. défintion 2.14).
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On rappelle que, pour toute partie A de D, l'image de A par u est l'ensemble $u(A) := \{u_n; n \in A\}$, et que, pour toute partie B de $\mathbb{K}$, l'image réciproque de B par u est l'ensemble $u^{-1}(B) := \{n \in D; u_n \in B\}$.

Proposition 3.35. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition (3.19) est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists W \in \mathcal{V}_{+\infty}^D\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big) \tag{3.22}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad u^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{+\infty}^D\,. \tag{3.23}$$

Preuve : On montre successivement les implications (3.19) $\implies$ (3.22) $\implies$ (3.23) $\implies$ (3.19).
(3.19) $\implies$ (3.22) : On suppose (3.19) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

Soit $W := D \cap [\![N; +\infty[\![$. C'est un voisinage de $+\infty$ dans D. De plus, pour $n \in W$, on a $n \geq N$ donc, par la propriété précédente, $u_n \in V$. On a montré (3.22).
(3.22) $\implies$ (3.23) : On suppose (3.22) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de $+\infty$ dans D tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

On montre que $W \subset u^{-1}(V)$. Soit $n \in W$. Par la propriété précédente, $u_n \in V$ donc, par définition de $u^{-1}(V)$, $n \in u^{-1}(V)$. On a donc bien $W \subset u^{-1}(V)$. Comme W est un voisinage de $+\infty$ dans D, $u^{-1}(V)$ en est aussi un, d'après la proposition 2.15. On a montré (3.23).
(3.23) $\implies$ (3.19) : On suppose (3.23) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $u^{-1}(V)$ est un voisinage de $+\infty$ dans D. Par définition, il existe un voisinage B de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u^{-1}(V) = B \cap D$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a; +\infty[\![\subset B$. Soit $N = a + 1$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $n \in B$ donc $n \in u^{-1}(V)$ c'est-à-dire $u_n \in V$. On a montré (3.19). □

Hors programme.

3.4.2 Limite finie.

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. On se concentre, dans ce paragraphe, sur les limites finies (i.e. celles appartenant à $\mathbb{K}$). On traite en parallèle les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Rappelons la définition 3.32 dans ce cas :

Définition 3.36. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.24}$$

Il est commode d'introduire la reformulation suivante de la proposition (3.24).

Proposition 3.37. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition (3.24) est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{3.25}$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$ et $n \in D$, la proposition $(|u_n - \ell| < \epsilon)$ est équivalente à $(u_n \in D(\ell;\epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et à $(u_n \in I(\ell;\epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Traitons d'abord le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(3.24) $\implies$ (3.25) : on suppose que (3.24) est vraie. Soit $\epsilon > 0$. On applique (3.24) au voisinage $V = D(\ell;\epsilon[$ de ℓ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que ce V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \in D(\ell;\epsilon[$ donc $|u_n - \ell| < \epsilon$. On a montré (3.25).
(3.25) $\implies$ (3.24) : on suppose (3.25) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$. On applique (3.25) à cet ϵ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$, c'est-à-dire $u_n \in D(\ell;\epsilon[$. Comme $D(\ell;\epsilon[\subset V$, on a donc, pour $n \in D$ et $n \geq N$, $u_n \in V$. On a montré (3.24).
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant le disque $D(\ell;\epsilon[$ par l'intervalle centré $I(\ell;\epsilon[$. $\square$

Voyons maintenant quelques exemples. Soit $c \in \mathbb{K}$, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ la suite constante égale à c. Montrons que u converge vers c. On montre (3.25) avec ℓ remplacé par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $N = 2022$. Pour $n \in D$ et $n \geq N$, on a $|u_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$.
On remarque que, dans ce cas, on aurait pu prendre $N = 1$ ou même $N = 0$.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $u_n = 1/n$. On devine qu'elle converge vers 0. Montrons-le.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (1/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (1/\epsilon) + 1$ donc $N > 1/\epsilon$. Donc $\epsilon > 1/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $0 < 1/n \leq 1/N < \epsilon$ donc $|1/n| < \epsilon$. On a montré que $\lim u$ existe et vaut 0.
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $v_n = 2i/n$. Là aussi, on devine que 0 est limite de v. On remarque que, pour tout $n > 0$, $|v_n| = 2/n$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (2/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (2/\epsilon) + 1$ donc $N > 2/\epsilon$. Donc $\epsilon > 2/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $|v_n - 0| = |v_n| = 2/n \leq 2/N < \epsilon$. Donc $\lim v = 0$.
Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$w_n \;=\; \frac{3}{1 + \frac{1}{n}}\,.$$

On devine que w tend vers 3. Montrons-le.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$|w_n - 3| \;=\; 3 \cdot \left|\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1\right| \;=\; 3 \cdot \left|\frac{1 - (1 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}}\right| \;=\; 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \;=\; \frac{3}{n + 1}\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (3/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (3/\epsilon) + 1$ donc $N > 3/\epsilon$. Donc $\epsilon > 3/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a, grâce au calcul précédent, $|w_n - 3| = 3/(n + 1) \leq 3/N < \epsilon$. Donc $\lim w = 3$.

3.4.3 Notions de limite infinie propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux limites infinies de suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On réécrit la définition 3.32 dans ce cadre.

Définition 3.38. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage réel de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \,\geq\, N) \implies (u_n \,\in\, V)\big)\,. \tag{3.26}$$

Attention : D'après la définition 3.34, on dit qu'une suite réelle, qui a une limite, converge uniquement si cette limite est un réel. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ diverge donc. Une suite réelle qui tend vers $-\infty$ diverge aussi.

Comme pour les limites finies, on dispose d'une autre formulation de la définition d'une limite infinie.

Proposition 3.39. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Lorsque $\ell = +\infty$, la proposition (3.26) est équivalente à

$$\forall\, L \,>\, 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \,\geq\, N) \implies (u_n \,>\, L)\big)\,. \tag{3.27}$$

Lorsque $\ell = -\infty$, la proposition (3.26) est équivalente à

$$\forall\, L \,>\, 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \,\geq\, N) \implies (u_n \,<\, -L)\big)\,. \tag{3.28}$$

Preuve : On traite le cas où $\ell = +\infty$ seulement. L'autre cas est similaire.
(3.26) $\implies$ (3.27) : On suppose (3.26) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.26) au voisinage $V =]L; +\infty[$ de $+\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc montré (3.27).
(3.27) $\implies$ (3.26) : On suppose (3.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset V$. Comme $|a| + 1 \geq |a| \geq a$, on a, en posant $L = |a| + 1 > 0$, $]L; +\infty[\subset]a; +\infty[\subset V$. En appliquant (3.27) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]L; +\infty[$ à partir du rang N. Donc, comme $]L; +\infty[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.26). $\square$

Voyons quelques exemples. Soit $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifions que $+\infty$ est sa limite. Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = L + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq L + 1$ donc $N > L$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n \geq N > L$ soit $n > L$. D'après (3.27), on a montré que

$$+\infty \;=\; \lim_{n\to\infty} n\,.$$

Montrons maintenant que $-\infty = \lim_n (-n^2)$. Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = \sqrt{L+1}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \sqrt{L+1}$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante, $\sqrt{L+1} > \sqrt{L}$ d'où $N > \sqrt{L}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n^2 \geq N^2 > L$ donc $-n^2 < -L$. D'après (3.28), on a démontré la propriété souhaitée.

3.5 Propriétés générales de la limite d'une suite.

On se place de nouveau dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on établit plusieurs propriétés sur les limites finies de suite. On rappelle que l'on a défini le module d'une suite complexe et la valeur absolue d'une suite réelle dans la définition 3.20.

Proposition 3.40. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a*

$$\big(\lim u \;=\; \ell\big) \iff \big(\lim_n |u_n \,-\, \ell| \;=\; 0\big)\,. \tag{3.29}$$

En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\big(\lim u \;=\; 0\big) \iff \big(\lim |u| \;=\; 0\big)\,. \tag{3.30}$$

De plus, on a

$$\big(\lim u \;=\; \ell\big) \implies \big(\lim |u| \;=\; |\ell|\big)\,. \tag{3.31}$$

Enfin, on suppose qu'il existe une suite réelle $w : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \,\geq\, N) \implies \big(|u_n \,-\, \ell| \;\leq\; w_n\big)\big)\,. \tag{3.32}$$

Alors la suite u converge vers ℓ. ("Théorème des gendarmes".)

Attention : il faut lire "$(\lim u \,=\, \ell)$" comme suit : "la limite de u existe et vaut ℓ".
La réciproque de (3.31) est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : soit $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $|u| = u$ est constante égale à 1, on a $\lim u = 1 = \lim |u|$. On a aussi $\lim |u| = |-1|$. Si cette réciproque était vraie, on aurait alors $\lim u = -1$. Contradiction.
En raison d'une similitude avec une propriété, propre aux suites réelles, que l'on verra plus loin (cf. proposition 3.43 et (3.36)), il est légitime de qualifier la dernière propriété de la proposition 3.40 de "propriété des gendarmes" ou "théorème des gendarmes".

Preuve de la proposition 3.40. :

a). On montre d'abord la dernière propriété. Sous les hypothèses de son énoncé, on montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.25). Soit $\epsilon > 0$. Comme w tend vers 0, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq w_n < \epsilon$ soit vraie à partir du rang N_1 (cf. (3.25) avec u remplacée par w et ℓ remplacée par 0). Pour $n \in D$ avec $n \geq \max(N; N_1)$, on a $n \geq N$ donc, par (3.32),

$$\big|u_n \,-\, \ell\big| \;\leq\; w_n \;<\; \epsilon$$

car $n \geq N_1$. On a montré $\lim u = \ell$.

b). On remarque que, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n \,-\, \ell| \,-\, 0\big| \;=\; |u_n \,-\, \ell|$$

donc (3.25) est identique à (3.25) avec u remplacée par $|u - \ell|$ et ℓ remplacé par 0. Ceci prouve l'équivalence (3.29).

c). Montrons (3.31). On suppose que $\lim u = \ell$. Par (2.3), on a, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n| \,-\, |\ell|\big| \;\leq\; |u_n \,-\, \ell|\,.$$

Par l'hypothèse et (3.29), la suite $w = |u - \ell|$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, on peut appliquer le théorème des gendarmes à $|u|$ (cf. a)), qui donne $\lim |u| = |\ell|$. □

On montre maintenant que la convergence des suites est préservée par certaines opérations sur les suites.

Proposition 3.41. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{K}^2$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim(u + v) \;=\; \ell + \ell'\,, \quad \lim(\lambda u) \;=\; \lambda \cdot \ell\,, \quad \lim(uv) \;=\; \ell \,\cdot\, \ell'\,.$$

Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors la suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $1/\ell$, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} \;=\; \frac{1}{\ell}\,.$$

Preuve :

a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $u + v$, c'est-à-dire la proposition (3.25) avec u remplacée par $u + v$ et ℓ remplacé par $\ell + \ell'$.

On remarque tout d'abord que, pour tout $n \in D$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| = \big|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\big| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|, \tag{3.33}$$

d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.2) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.6) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant (3.33) et le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

b). On montre maintenant que $\ell\cdot\ell'$ est limite de $u\cdot v$, c'est-à-dire la proposition (3.25) avec u remplacée par $u \cdot v$ et ℓ remplacé par $\ell \cdot \ell'$.

On écrit tout d'abord, pour tout $n \in D$,

$$(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell') = u_n \cdot (v_n - \ell') + (u_n - \ell) \cdot \ell'\,.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \leq |u_n| \cdot \big|v_n - \ell'\big| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'|\,. \tag{3.34}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$\epsilon' \in \Big]0\,;\, \min\Big(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\Big)\Big]\,.$$

Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \epsilon'$, $|u_n - \ell| < \epsilon'$ et donc aussi

$$|u_n| = \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < \epsilon' + |\ell|\,.$$

Donc, d'après (3.34) et le choix de ϵ',

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| < \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \leq \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \leq \epsilon\,.$$

On a montré $\lim(uv) = \ell\ell'$.

c). En remplaçant la suite v par la suite constante égale à λ, qui converge vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim(\lambda u) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim u = \ell$, le voisinage A contient tout les termes de la suite u à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Comme $A \cap B = \emptyset$, ces termes n'appartiennent pas à B donc ne peuvent être nuls, car $0 \in B$. Soit $D_0 = D \cap [\![N_0; +\infty[\![$. La suite

$$x = (1/u_n)_{n \in D_0}$$

est donc bien définie. Montrons qu'elle tend vers $1/\ell$, via la version appropriée de (3.25).

Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $n \in D_0$, on a $u_n \notin B$, donc $u_n \notin D(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u_n \notin I(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|u_n| \geq \delta_0$. De plus, pour $n \in D_0$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{\big|\ell - u_n\big|}{|u_n| \cdot |\ell|} \leq \frac{\big|u_n - \ell\big|}{\delta_0 \cdot |\ell|}\,. \tag{3.35}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0; \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D_0$ et $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et, d'après (3.35),

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \leq \epsilon \, .$$

On a montré que $\lim(1/u) = 1/\ell$. □

Pour terminer ce paragraphe, donnons un résultat commode sur la convergence des suites complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une suite complexe dans la définition 3.21.
On veut étudier la limite de la suite $u = (3 + i/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On voit que $\Re(u)$ est la suite réelle constante égale à 3 sur $\mathbb{N}^*$. Elle converge donc vers 3. Quant à $\Im(u)$, c'est la suite réelle $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on a étudiée plus haut. On a vu qu'elle converge vers 0. Que peut-on dire sur la convergence de la suite u ? La proposition 3.42 ci-dessous permet de répondre.

Proposition 3.42. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim u = \ell \iff \Big(\big(\lim \Re(u) = \Re(\ell)\big) \quad \textit{et} \quad \big(\lim \Im(u) = \Im(\ell)\big) \Big) \, .$$

Preuve : On procède par double implication.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u = \ell$. Pour tout $n \in D$, on a, d'après (2.4),

$$\big|(\Re(u))_n - \Re(\ell)\big| = \big|\Re(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(u))_n - \Im(\ell)\big| = \big|\Im(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell| \, .$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 3.40 avec $v_n = |u_n - \ell|$, on en déduit que $\lim \Re(u)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim \Im(u)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\Re(u)$ converge vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ converge vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 3.41 (avec u remplacée par $\Im(u)$ et $\lambda = i$), $i\Im(u)$ converge vers $i\Im(\ell)$. Par la proposition 3.41 (avec u remplacée par $\Re(u)$ et v remplacée par $i\Im(u)$), $u = \Re(u) + i\Im(u)$ converge vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$. □

Exemple d'application : On s'intéresse maintenant à la suite $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $n > 0$, $v_n = (1/(n+1)) + ni$. On remarque que $\Im(v) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu plus haut que $\lim \Im(v) = +\infty$. Donc $\Im(v)$ n'a pas de limite finie. Par proposition 3.42, la limite de v n'existe pas puisque la proposition de droite de l'équivalence est fausse pour tout $\ell \in \mathbb{C}$.

3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles.

On revient dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les suites réelles, un pendant de la proposition 3.41 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la **convention** que l'on a prise au paragraphe 1.2 : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 3.43. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors u est strictement supérieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n > b$.*
2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors u est strictement inférieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n < b$.*