L3M, Contrôle continu de calcul intégral, 2 octobre 2020 (60 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, **sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée**. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (8 pts). Déterminer les sommes des familles suivantes :

1. $a = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = n^2$ si $n \in [0;1]$ et $b_n = 0$ sinon.
3. Pour $r > 0$, soit $u = (u_i)_{i\in\mathbb{R}}$ définie par $u_i = (1+r)^{-i}$ si $i \in \mathbb{N}$ et $u_i = 0$ sinon.
4. $(v_{m;n})_{(m;n)\in\mathbb{N}^2}$ définie par
$$v_{m;n} \;=\; 3^{-(m+n\ln 2)}\,.$$
5. $w = (n^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. : (5 pts).

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$. Suivant les valeurs de a, déterminer $\limsup u$.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Déterminer la plus grande partie D de $\mathbb{R}$ sur laquelle la fonction $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que vaut $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sur D ?

Exercice 3. : (4 pts). Soit I et J deux ensembles non vides. Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles d'ensembles. On suppose que I est dénombrable et que, pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble
$$E \;=\; \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$$
est au plus dénombrable.
2. Donner un exemple de telles familles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ tel que J est non dénombrable, tel que, pour tout $j \in J$, B_j est non dénombrable et tel que E est l'ensemble vide.

TOURNEZ SVP.

Exercice 4. : (3 points). Vrai ou faux. Répondre **sans justification**. $-0{,}25$ point par réponse fausse, 0,5 point par réponse juste, 0 point pour l'absence de réponse. Mais la note minimale à l'exercice sera 0.
Notation : On note par "exp" la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et par "Arctan" la fonction arctangente.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de termes positifs. On a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \;=\; \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} v_{2p}\right) + \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} v_{2p+1}\right) .$$
2. La famille $(n\ln(1+1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit
$$u_x \;=\; \exp\Big[\sin(x)\cdot\ln(x^2+1)\cdot\mathrm{Arctan}\big(\cos(\pi x)\big)\Big] .$$
La famille $(u_x)_{x\in\mathbb{R}}$ n'est pas sommable.
4. Il existe une bijection entre $\mathbb{Q}^2 := \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$.
5. Une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide.
6. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Fin de l'épreuve.