Voisinages de $\mathbb{C}$, voisinages de $\mathbb{R}$.

Exercice 20. : Fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $t \geq 0$, $f(t) = t^2$. Montrer que f est strictement croissante, c'est-à-dire que
$$\forall\,(t_1; t_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \big(t_1 < t_2 \implies f(t_1) < f(t_2)\big)\,.$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $\mathcal{S}(x) := \{t \in \mathbb{R}^+; t^2 \leq x\}$. Montrer que $\sup \mathcal{S}(x) \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $x \geq 0$, $g(x) = \sup \mathcal{S}(x)$. Justifier que $g(0) = 0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   a). On suppose que $g(x)^2 > x$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(g(x) - \delta)^2 \geq x$. (Indication : on pourra poser $\epsilon = g(x)^2 - x > 0$ et chercher une solution $\delta > 0$ de l'inéquation $(g(x) - \delta)^2 \geq x$.)
   b). En déduire que $g(x) - \delta$ majore $\mathcal{S}(x)$.
   c). Établir une contradiction.
   d). On suppose que $g(x)^2 < x$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(g(x) + \delta)^2 \leq x$. (Indication : on pourra poser $\epsilon = x - g(x)^2 > 0$ et chercher une solution $\delta > 0$ de l'inéquation $(g(x) - \delta)^2 \leq x$.)
   e). En déduire une contradiction.

   On a montré que $x = g(x)^2$. On remarque que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$.
5. Vérifier que, pour $a \in \mathbb{R}$, $g(a^2) = |a|$.
6. Montrer que g est strictement croissante, c'est-à-dire que
$$\forall\,(x_1; x_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \big(x_1 < x_2 \implies g(x_1) < g(x_2)\big)\,.$$

La fonction g est appelée fonction racine carrée et est notée par $\sqrt{\cdot}$. On dispose dans le cours d'une autre construction de la fonction racine carrée, construction qui utilise les bijections continues.

Exercice 21. : On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \;&=\; \left(\forall\,(z;z')\in\mathbb{C}^2\,,\quad |z+z'| \;\le\; |z| \,+\, |z'|\right)\,,\\ \mathcal{Q} \;&=\; \left(\forall\,(z;z')\in\mathbb{C}^2\,,\quad \big||z| \,-\, |z'|\big| \;\le\; |z \,-\, z'|\right)\,. \end{aligned}$$

Vérifier l'équivalence ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$).

Exercice 22. : Soit $(z;z')\in\mathbb{C}^2$. Par le cours, on sait que $|z+z'|\le|z|+|z'|$. On cherche à savoir quand cette inégalité large est une égalité.
On remarque que c'est le cas si $z=0$ et, dans ce cas, $z=0\cdot z'$.
On remarque que c'est aussi le cas si $z'=0$ et, dans ce cas, $z'=0\cdot z$.
On prend maintenant $(z;z')\in(\mathbb{C}^*)^2$.

1. Montrer l'implication

$$\left(\exists\,\lambda\in\mathbb{R}^+\,;\quad z' \;=\; \lambda\cdot z\right) \;\Longrightarrow\; \left(|z+z'| \;=\; |z| \,+\, |z'|\right)\,.$$

2. Soit $(z;z')\in(\mathbb{C}^*)^2$ tel que $|z+z'|=|z|+|z'|$. On écrit $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$ avec $(r,r')\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ et $(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$.
   a). Donner une expression de $|z+z'|^2$ en fonction de $(r;r';\theta;\theta')$, qui ne contient pas le signe $|\cdot|$.
   b). Vérifier que $\cos(\theta-\theta')=1$.
   c). En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $z'=\lambda z$.

On a montré, pour $(z;z')\in\mathbb{C}^2$, l'équivalence

$$\left(|z+z'| \;=\; |z| \,+\, |z'|\right) \iff \Big(\exists\,\alpha\in\mathbb{R}^+\,;\quad \left(z' \;=\; \alpha\cdot z\right) \quad\text{ou}\quad \left(z \;=\; \alpha\cdot z'\right)\Big)\,.$$

Une autre preuve de cette équivalence est donnée dans les compléments du cours.

Exercice 23. : Disques de $\mathbb{C}$.
On pourra utiliser le fait que la droite passant par deux nombres complexes z et z' différents est donné par $\{tz+(1-t)z';t\in\mathbb{R}\}$.

1. Soit $z_0\in\mathbb{C}$ et $r\in\mathbb{R}^+$. On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A \;:=\; \left\{|z|\,;\ z\in D(z_0;r]\right\}\,.$$

   Montrer que $\sup A\le|z_0|+r$ et que $D(z_0;r]\subset D(0;|z_0|+r]$.

2. Soit $(z_0;z_1)\in\mathbb{C}^2$ et $(r_0;r_1)\in(\mathbb{R}^+)^2$.

a). On suppose $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| < r_0 + r_1 \,.$$

b). Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1] \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \leq r_0 + r_1 \,.$$

c). On suppose $r_0 > 0$. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[\subset D(z_1; r_1[\quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1$$

d). Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0] \subset D(z_1; r_1] \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1 \,.$$

Exercice 24. : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$.

1. Soit $(r; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 = z_1 + re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
   a). On suppose $r < r_1$. Montrer que $D(z_1; r_1[$ est un voisinage complexe de z_0.
   b). On suppose $r = r_1$. Montrer que ni $D(z_1; r_1[$ ni $D(z_1; r_1]$ n'est un voisinage complexe de z_0.
2. Montrer que les ensembles

$$A := \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z) \in [-1; 1]\big\} \quad \text{et} \quad B := \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z) \in]-1; 2]\big\}$$

   sont des voisinages complexes de 0 dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les ensembles

$$A_1 := \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_1) \in [-1; 1]\big\} \quad \text{et} \quad B_1 := \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_1) \in]-1; 2]\big\}$$

   sont des voisinages complexes de z_1 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 25. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que l'intervalle $]-2; 3[$ est un voisinage réel de 0. L'intervalle $]-2; 3]$ est-il aussi un voisinage réel de 0 ?
2. L'intervalle $]-2; 3[$ est-il un voisinage réel de 3 ? L'intervalle $]-2; 3]$ est-il un voisinage réel de 3 ?
3. L'intervalle $]-2; 3 + 10^{-2023}[$ est-il un voisinage réel de 3 ?

4. L'ensemble
$$A \ := \ \{0\} \bigcup \left\{-\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
est-il un voisinage réel de 0 ?

Exercice 26. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que les points 0 et 3 sont adhérents à $]-2;3[$.
2. Le point 2 est-il adhérent à l'ensemble $[0;1] \cup [2{,}5;8[$?
3. Le point 2 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$? Le point 2,5 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?
4. Trouver une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et un $a \in \mathcal{D}$ tels que a est adhérent à $\mathcal{D}$ mais a n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.

Exercice 27. : Montrer que la partie A de $\mathbb{C}$ donnée par
$$A \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z) = 0\,,\, \Re(z) \in]-1;1[\big\}$$
n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) = 0\}$, on peut considérer A comme une partie de $\mathbb{R}$. Est-elle un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$?

Exercice 28. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Vérifier qu'une partie bornée B de $\mathbb{R}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que l'ensemble
$$A \ := \ \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 \geq 2\big\}$$
est un voisinage de $-\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.
5. $\mathbb{Z}$ est-il un voisinage de $-\infty$?

Exercice 29. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie bornée B de $\mathbb{R}$.
2. $+\infty$ est-il adhérent à $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$?
3. Montrer que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.
4. $-\infty$ est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?