Voisinages de $\mathbb{C}$, voisinages de $\mathbb{R}$.

Exercice 18. : Fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $t \geq 0$, $f(t) = t^2$. Montrer que f est strictement croissante, c'est-à-dire que
$$\forall (t_1; t_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \left(t_1 < t_2 \implies f(t_1) < f(t_2)\right).$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $\mathcal{S}(x) := \{t \in \mathbb{R}^+; t^2 \leq x\}$. Montrer que $\sup \mathcal{S}(x) \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $x \geq 0$, $g(x) = \sup \mathcal{S}(x)$. Justifier que $g(0) = 0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   a). On suppose $g(x)^2 > x$. Montrer qu'il existe $\delta \in]0; g(x)]$ tel que $(g(x) - \delta)^2 \geq x$. (Indication : on pourra poser $\epsilon = g(x)^2 - x > 0$ et chercher δ en fonction de ϵ et $g(x)$.)
   b). En déduire que $g(x) - \delta$ majore $\mathcal{S}(x)$.
   c). Établir une contradiction.
   d). On suppose $g(x)^2 < x$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(g(x) + \delta)^2 \leq x$. (Indication : on pourra poser $\epsilon = x - g(x)^2 > 0$ et chercher δ en fonction de ϵ et $g(x)$.)
   e). En déduire une contradiction.

   On a montré que $x = g(x)^2$. On remarque que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$.
5. Vérifier que, pour $a \in \mathbb{R}$, $g(a^2) = |a|$.
6. Montrer que g est strictement croissante, c'est-à-dire que
$$\forall (x_1; x_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \left(x_1 < x_2 \implies g(x_1) < g(x_2)\right).$$

La fonction g est appelée fonction racine carrée et est notée par $\sqrt{\cdot}$. On dispose dans le cours d'une autre construction de la fonction racine carrée, construction qui utilise les bijections continues.

Exercice 19. : On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left(\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z+z'| \;\leq\; |z| \,+\, |z'|\right), \\ \mathcal{Q} &= \left(\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| \,-\, |z'|\big| \;\leq\; |z \,-\, z'|\right). \end{aligned}$$

Vérifier l'équivalence $(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 20. : Soit $(z;z') \in \mathbb{C}^2$. Par le cours, on sait que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$. On cherche à savoir quand cette inégalité large est une égalité.
On remarque que c'est le cas si $z=0$ et, dans ce cas, $z = 0\cdot z'$.
On remarque que c'est aussi le cas si $z'=0$ et, dans ce cas, $z' = 0\cdot z$.
On prend maintenant $(z;z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

1. Montrer l'équivalence

$$\left(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^+\,; \quad z' \,=\, \lambda\cdot z\right) \Longleftrightarrow \left(\exists\,\mu \in \mathbb{R}^+\,; \quad z \,=\, \mu\cdot z'\right).$$

2. Montrer l'implication

$$\left(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^+\,; \quad z' \,=\, \lambda\cdot z\right) \Longrightarrow \left(|z+z'| \,=\, |z| \,+\, |z'|\right).$$

3. Soit $(z;z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $|z+z'| = |z|+|z'|$. On écrit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $(r,r') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$.
   - a). Donner une expression de $|z+z'|^2$ en fonction de $(r;r';\theta;\theta')$, qui ne contient pas le signe $|\cdot|$.
   - b). Vérifier que $\cos(\theta-\theta') = 1$.
   - c). En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $z' = \lambda z$.

On a montré, pour $(z;z') \in \mathbb{C}^2$, l'équivalence

$$\left(|z+z'| \,=\, |z| \,+\, |z'|\right) \Longleftrightarrow \Big(\exists\,\alpha \in \mathbb{R}^+\,; \quad \left(z' \,=\, \alpha\cdot z\right) \quad \text{ou} \quad \left(z \,=\, \alpha\cdot z'\right)\Big).$$

Une autre preuve de cette équivalence est donnée dans les compléments du cours.

Exercice 21. : Soit $(z_1;z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $z_1 \neq z_2$. La droite $\mathcal{D}$ passant par z_1 et z_2 est, par définition, l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbb{C}\,;\; \exists\,\lambda \in \mathbb{R}\,;\; z - z_1 \;=\; \lambda(z_2 - z_1)\right\}.$$

Le vecteur $z_2 - z_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
Par définition, le segment reliant z_1 à z_2, noté $S(z_1;z_2)$ est l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathcal{D}$ tels que la coordonnée (réelle) du vecteur $z - z_1$ dans la base $z_2 - z_1$ appartient à $[0;1]$.

1. Montrer que
$$\mathcal{D} \;=\; \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \exists t \in \mathbb{R}\,;\; z \;=\; tz_2 \,+\, (1-t)z_1 \right\} .$$

2. Montrer que
$$S(z_1; z_2) \;=\; \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \exists t \in [0;1]\,;\; z \;=\; tz_2 \,+\, (1-t)z_1 \right\} .$$

Exercice 22. : Disques de $\mathbb{C}$.
On pourra utiliser l'exercice 21.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par
$$A \;:=\; \left\{ |z|\,;\; z \in D(z_0; r] \right\} .$$
Montrer que $\sup A \le |z_0| + r$ et que $D(z_0; r] \subset D(0; |z_0| + r]$.

2. Soit $(z_0; z_1) \in \mathbb{C}^2$ et $(r_0; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

   a). On suppose $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$. Montrer l'équivalence
$$D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\;\neq\; \emptyset \quad\Longleftrightarrow\quad |z_0 - z_1| \;<\; r_0 + r_1 \,.$$

   b). Montrer l'équivalence
$$D(z_0; r_0] \;\cap\; D(z_1; r_1] \;\neq\; \emptyset \quad\Longleftrightarrow\quad |z_0 - z_1| \;\le\; r_0 + r_1 \,.$$

   c). On suppose $r_0 > 0$. Montrer l'équivalence
$$D(z_0; r_0[\subset\; D(z_1; r_1[\quad\Longleftrightarrow\quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \;\le\; r_1$$

   d). Montrer l'équivalence
$$D(z_0; r_0] \;\subset\; D(z_1; r_1] \quad\Longleftrightarrow\quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \;\le\; r_1 \,.$$

3. Vérifier que l'on a des propriétés similaires (à préciser) pour des intervalles $I(x_0; r_0[$, $I(x_0; r_0]$, $I(x_1; r_1[$, $I(x_1; r_1]$de $\mathbb{R}$, avec $(x_0; x_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(r_0; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

Exercice 23. : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$.

1. Soit $(r; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 = z_1 + re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

   a). On suppose $r < r_1$. Montrer que $D(z_1; r_1[$ est un voisinage complexe de z_0.

   b). On suppose $r = r_1$. Montrer que $D(z_1; r_1[\notin \mathcal{V}_{z_0}$ et $D(z_1; r_1] \notin \mathcal{V}_{z_0}$.

2. Montrer que les ensembles
$$A \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) \in [-1;1] \right\} \quad \text{et} \quad B \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}\,(z) \in]-1;2] \right\}$$
sont des voisinages complexes de 0 dans $\mathbb{C}$.

3. Montrer que les ensembles

$$A_1 \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,(z - z_1) \in [-1;1]\big\} \quad \text{et} \quad B_1 \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}\,(z - z_1) \in]-1;2]\big\}$$

sont des voisinages complexes de z_1 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 24. : Justifier toute réponse aux questions. Les voisinages considérés ici sont tous des voisinages réels.

1. Montrer que $]-2;3[\in \mathcal{V}_0$. A-t-on $]-2;3] \in \mathcal{V}_0$?
2. A-t-on $]-2;3[\in \mathcal{V}_3$? A-t-on $]-2;3] \in \mathcal{V}_3$?
3. A-t-on $]-2;3+10^{-2023}[\in \mathcal{V}_3$?
4. L'ensemble
$$A \ := \ \{0\} \bigcup \left\{-\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
est-il un voisinage réel de 0 ?

Exercice 25. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que les points 0 et 3 sont adhérents à $]-2;3[$.
2. Le point 2 est-il adhérent à l'ensemble $[0;1] \cup [2{,}5;8[$?
3. Le point 2 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$? Le point 2,5 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?
4. Trouver une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et un $a \in \mathcal{D}$ tels que a est adhérent à $\mathcal{D}$ mais a n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.

Exercice 26. : Montrer que la partie A de $\mathbb{C}$ donnée par

$$A \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}\,(z) = 0\,,\ \mathrm{Re}\,(z) \in]-1;1[\big\}$$

n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$, on peut considérer A comme une partie de $\mathbb{R}$. Est-elle un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$?

Exercice 27. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Vérifier qu'une partie bornée B de $\mathbb{R}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

3. Montrer que l'ensemble
$$A \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; x^2 \geq 2\}$$
est un voisinage de $-\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.
5. $\mathbb{Z}$ est-il un voisinage de $-\infty$?

Exercice 28. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie bornée B de $\mathbb{R}$.
2. $+\infty$ est-il adhérent à $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$?
3. Montrer que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.
4. $-\infty$ est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?