Suites.

Exercice 29. : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0;1\}$ et $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $u_n = z^n$.

1. On suppose $|z| < 1$. Montrer que la suite $|u|$ est strictement décroissante, strictement positive, majorée par 1 et strictement majorée par 1 à partir d'un certain rang.
2. On suppose $|z| > 1$. Montrer que la suite $|u|$ est strictement croissante, minorée par 1 et strictement minorée par 1 à partir d'un certain rang.
3. On suppose $z = \exp(i\theta)$, pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $|u|$ est constante mais que la suite u n'est pas constante.

Exercice 30. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a;b)$.

1. Vérifier que l'on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; d \cdot a^n \,+\, b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,. \tag{12}$$
En particulier, lorsque $b = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d \cdot a^n$.
2. Lorsque $a = 1$, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.
3. On suppose $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \;=\; \frac{1\,-\,a^n}{1\,-\,a} \;=\; \frac{a^n\,-\,1}{a\,-\,1}\,. \tag{13}$$
4. Lorsque $a \neq 1$, donner une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. On suppose $a \notin \{0;1\}$. Montrer que u est constante si et seulement si $d(a-1)+b = 0$. Que vaut la constante dans ce cas-là ?
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 29.)
6. Soit $p \in [\![2;+\infty[\![$ et $a = \exp(2i\pi/p)$. Montrer que
$$\forall q \in \mathbb{N}\,, \quad \sum_{k=q}^{q+p-1} a^k \;=\; 0\,.$$

Exercice 31. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n} C_\ell^n \cdot a^{n-\ell} \cdot b^\ell \,, \tag{14}$$

   où, pour $k \in [\![0;n]\!]$,

$$C_k^n \;:=\; \frac{n!}{(k!) \cdot \big((n-k)!\big)} \,.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a^{n+1} \;-\; b^{n+1} \;=\; (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} \,. \tag{15}$$

Exercice 32. : Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \;:=\; \frac{1}{n+1} \;-\; \frac{1}{n} \,.$$

1. Vérifier que la suite u est strictement négative.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule explicite en fonction de n de

$$s_n \;:=\; \sum_{k=1}^{n} u_k \,.$$

Exercice 33. : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ et une application $a : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour $(i;j) \in \mathbb{N}^2$, on note $a_{i;j} := a((i;j))$.

1. Soit $(n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que

$$\sum_{i=n_0}^{n} \left(\sum_{j=n_1}^{p} a_{i;j} \right) \;=\; \sum_{j=n_1}^{p} \left(\sum_{i=n_0}^{n} a_{i;j} \right) \,.$$

   (Indication : on pourra faire une récurrence sur p).

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i-1} u_i u_j \right) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} u_i u_j \right) \,. \tag{16}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note la valeur commune dans (16) par

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} u_i u_j \ .$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)^2 \ = \ \sum_{i=0}^{n} u_i^2 \ + \ 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} u_i u_j \ .$$

Exercice 34. : On considère les suites réelles $u = (2)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (n^2 - 4n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sont-elles monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles strictement monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles majorées ? Sont-elles minorées ? Sont-elles bornées ? Justifier toute réponse.

Exercice 35. : Soit $u = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que la suite u est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'elle est strictement croissante à partir du rang 1.
2. Montrer que u n'est pas majorée.

La restriction de u à $\mathbb{N}^*$ est donc une extractrice.

Exercice 36. : Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $u_n = an + b$ est une extractrice.
2. La restriction de u à $[\![7; +\infty[\![$ est-elle une extractrice ?
3. Soit $n_0 = E(b/a) + 1$ et $v : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $v_n = an - b$. Montrer que v est une extractrice.

Exercice 37. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \ = \ 2^n \quad \text{et} \quad v_n \ = \ \left(2^2\right)^n .$$

1. Vérifier que u est une extractrice.
2. Vérifier que v est une sous-suite de u.
3. La suite v est-elle égale à la sous-suite $(u \circ u)$ de u ?

Exercice 38. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \; = \; 2^n \quad \text{et} \quad v_n \; = \; n! \; .$$

1. Montrer que la suite u/v est bien définie.
2. Montrer que la suite u/v est décroissante.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
4. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de u/v à $[\![p; +\infty[\![$ est strictement décroissante.
5. En déduire que, pour tout $n \in [\![p+1; +\infty[\![$, $u_n < v_n$.

Exercice 39. : On note par sin la fonction sinus. Soit $v = ((-1)^m)_{m\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'expression
$$\frac{1}{\sin(n\pi/4)}$$
n'a de sens que pour $n \notin \{4k;\, k \in \mathbb{N}\}$.
2. On pose $4\mathbb{N} := \{4k;\, k \in \mathbb{N}\}$ et $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$. Vérifier que D est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,
$$u_n \; = \; \frac{1}{\sin(n\pi/4)}$$
est bien définie et est infinie.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $2(2p+1) \in D$. Déterminer $u_{2(2p+1)}$.
5. En déduire que v est une sous-suite de u.

Exercice 40. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. On considère la série associée, à savoir la suite $S = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N \; := \; \sum_{n=0}^{N} u_n \; .$$

1. Déterminer les sous-suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ de la suite S.
2. Vérifier que la suite S est minorée par 0 et majorée par 1.

3. La suite $v = (v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$v_p \ := \ \sum_{n=0}^{p} u_{2n} \ ,$$

est-elle une sous-suite de la suite S ?

Exercice 41. : Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n \ := \ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \ - \ \ln(n+1) \ .$$

On rappelle que $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la primitive s'annulant en 1 de la fonction $0 < t \mapsto 1/t$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \ \leq \ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \ \leq \ \frac{1}{k} \ .$$

3. En déduire que la suite u est positive.

Limites de suites.

Exercice 42. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que 1 et $+\infty$ ne peuvent être tous deux une limite de u.

Exercice 43. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Étant donnés $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{I}(\epsilon; N) \ := \ \big(\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,.$$

Dire que $\mathcal{I}(\epsilon; N)$ est vrai signifie que l'inégalité $|u_n - \ell| < \epsilon$ est vraie à partir du rang N. On considère la proposition

$$\mathcal{P} \ := \ \big(\forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \mathcal{I}(\epsilon; N)\big)\,.$$

1. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\mathcal{S}(\epsilon)$ l'ensemble des solutions de l'inéquation, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, donnée par : $|u_n - \ell| < \epsilon$. Pour $N \in \mathbb{N}$, montrer l'équivalence :

$$\mathcal{I}(\epsilon; N) \iff \big(\llbracket N; +\infty \llbracket \ \subset \ \mathcal{S}(\epsilon)\big)\,.$$

   En particulier, la proposition $\mathcal{P}_\epsilon := (\exists\, N \in \mathbb{N};\, \mathcal{I}(\epsilon; N))$ est équivalente à la proposition $\mathcal{Q}_\epsilon := (\exists\, N \in \mathbb{N};\, \llbracket N; +\infty\llbracket \subset \mathcal{S}(\epsilon))$. Pour montrer que $\mathcal{P}_\epsilon$ est vraie, il n'est pas nécessaire de déterminer complètement $\mathcal{S}(\epsilon)$, il suffit de montrer que $\mathcal{Q}_\epsilon$ est vraie, c'est-à-dire que $\mathcal{S}(\epsilon)$ contient un intervalle $\llbracket N; +\infty\llbracket$, pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

2. Soit $\epsilon > 0$. Soit $(N; N') \in \mathbb{N}^2$ tel que $N' \geq N$. Montrer l'implication :

$$\big(\mathcal{I}(\epsilon; N) \implies \mathcal{I}(\epsilon; N')\big)\,.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $(\epsilon; \epsilon') \in]0; +\infty[^2$ tel que $\epsilon' \geq \epsilon$. Montrer l'implication :

$$\big(\mathcal{I}(\epsilon; N) \implies \mathcal{I}(\epsilon'; N)\big)\,.$$

4. Vérifier que les propositions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \ &:= \big(\forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \mathcal{I}(\epsilon; N)\big)\,,\\
\mathcal{P}(1) \ &:= \big(\forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, N \in \llbracket 2067; +\infty\llbracket\,;\ \mathcal{I}(\epsilon; N)\big)\,,\\
\mathcal{P}(2) \ &:= \big(\forall\, \epsilon \in]0; 1]\,, \exists\, N \in \llbracket 2067; +\infty\llbracket\,;\ \mathcal{I}(\epsilon; N)\big)\,,\\
\mathcal{P}(3) \ &:= \big(\forall\, \epsilon \in]0; 1]\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \mathcal{I}(\epsilon; N)\big)\,.
\end{aligned}$$

5. Montrer que $\mathcal{P}$ est aussi équivalente à
$$\mathcal{Q} \;:=\; \big(\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,;\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big)\,.$$
6. Soit
$$\mathcal{R} \;:=\; \big(\forall \epsilon \geq 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,;\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big)\,.$$
Montrer que, si $\mathcal{R}$ est vraie, la suite u est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).
7. En déduire que l'implication ($\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{P}$) est vraie.
8. Donner un exemple de suite réelle u et de réel ℓ pour lesquels l'implication
$$\mathcal{P} \implies \mathcal{R}$$
est fausse.
En particulier, $\mathcal{R}$ n'est pas toujours équivalente à $\mathcal{P}$.

Exercice 44. : Montrer la convergence des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. $v = (5 + (4/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. $w = 2u$.
4. $x = (3 - (1/n) + (2/n^4) + (1/n^6))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. $z : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n > 0$,
$$z_n \;:=\; 3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot i\,.$$

Exercice 45. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite $|u|$ est majorée par 3. On suppose, de plus, que u converge vers -2 et que v converge vers $3/2$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que
$$u_n \cdot v_n + 3 \;=\; u_n \cdot (v_n - (3/2)) + (3/2)\cdot(u_n + 2)\,.$$
2. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

Exercice 46. : Montrer l'existence de la limite des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $v = (5 + 4n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $w = (1 - n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. $x = (n + \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 47. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite u converge vers 3. On suppose que v diverge vers $+\infty$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_2$, $v_n > 0$.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

Exercice 48. : Soit $u : [\![2; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle convergeant vers -3. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $-4 < u_n < -2$.
   En particulier, u ne s'annule pas à partir du rang N_1 donc $(1/u)$ est définie à partir de ce rang N_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_1$, vérifier que
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{-1}{3}\right| \leq \frac{|u_n + 3|}{6}.$$
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

Exercice 49. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite complexe dont la partie réelle converge vers 2 et la partie imaginaire converge vers -3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite u converge.

Exercice 50. : Montrer, en utilisant des sous-suites, que les suites

1. $((-1)^n n^2)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $(\sin(n\pi/6))_{n\in\mathbb{N}}$
3. et $(\exp(in\pi/5))_{n\in\mathbb{N}}$

n'ont pas de limite.

Exercice 51. : Soit $a = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\lim a$ et $\lim b$ existent et valent $+\infty$.

Exercice 52. : Étudier la limite des suites :

1. $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $a_n = 2n+1$,
2. $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $b_n = n^3 - n$,
3. $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$u_n = \frac{n^3 - n + 7}{n^4 + 2n^2 + 1},$$
4. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$v_n = \frac{n^5 - n^3 + 2n - 3}{n^2 + 1},$$
5. $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = n + (-1)^n$.

Exercice 53. : Autour des cas indéterminés. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = 4$.
2. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = -\infty$.
3. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $(u+v)$ n'a pas de limite.
4. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = 0$ et $\lim(uv) = 4$.
5. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = 0$ et $\lim(uv) = +\infty$.
6. Trouver un exemple de suites u et v tel que $\lim u = +\infty$, $\lim v = 0$ et (uv) n'a pas de limite.

7. Trouver un exemple de suite v tel que $\lim v = 0$ et $(1/v)$ n'a pas de limite.

Exercice 54. : Montrer la convergence des suites

1. $(\sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
2. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$v_n = \frac{\cos\big(e^n + n^3 - n^7 - 2\big)}{2n+1}$$
3. et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$w_n = \frac{n+\sin(n)}{n+3} .$$

Exercice 55. : Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère les suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ données par,

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = z^n \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*\,, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k\,.$$

On remarque que, lorsque $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, les suites u et s sont réelles.
On pourra utiliser les résultats des exercices 29 et 30.

1. On suppose que $z = 1$. Montrer que u et s ont une limite que l'on déterminera.
2. On suppose $z \neq 1$. Montrer l'équivalence : (u converge) si et seulement si (s converge).
3. On suppose que u converge. Vérifier que $z \neq 1$ et que s converge. Montrer que $1 + (z-1)(\lim s) = \lim u$.
4. On suppose $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Montrer l'équivalence :
$$\big(\lim u \text{ existe et vaut } +\infty\big) \iff \big(\lim s \text{ existe et vaut } +\infty\ \big)\,.$$
5. On suppose que $|z| < 1$.
   a). Montrer que $|u|$ converge vers un certain réel $\ell \geq 0$.
   b). Montrer que $\ell = 0$. (Indication : on pourra utiliser la sous-suite $(|u_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ de $|u|$).
   c). En déduire que u tend vers 0.
   d). En déduire que s converge. Déterminer sa limite.
6. On suppose $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$.
   a). Montrer que u tend vers $+\infty$.
   (Indication : on pourra utiliser la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de u).

b). En déduire que s a une limite que l'on précisera.

7. On suppose $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x \leq -1$. Montrer que u n'a pas de limite. (Indication : on pourra supposer que $\ell = \lim u$ existe, distinguer le cas où ℓ est finie du cas où ℓ est infinie et utiliser la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de u pour trouver une contradiction).

8. On suppose $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x \leq -1$. Montrer que s n'a pas de limite.

9. On suppose $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}$. Montrer que ni u ni s n'a de limite.

Exercice 56. : On **admet** l'existence et l'unicité de suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que $u_0 = 5$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; \frac{u_n \,+\, v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \;=\; 2 \cdot \left(\frac{1}{u_n} \,+\, \frac{1}{v_n}\right)^{-1} .$$

1. Montrer que la proposition $\mathcal{P}(n) = (v_n \leq v_{n+1} < u_{n+1} \leq u_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} \,-\, v_{n+1}| \;\leq\; \frac{|u_n \,-\, v_n|}{2} .$$

3. En déduire que u et v sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune.

4. Montrer que $\ell \geq 0$.

5. Déterminer explicitement ℓ. (Indication : on pourra considérer la suite $u \cdot v$.)

Exercice 57. : Déterminer la borne supérieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $A := [0;3[$;

2. $B := [3;7[\cap]0;5]$;

3. $$C \;:=\; \left\{\frac{1}{n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\right\} ;$$

4. $D := \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

5. $$E \;:=\; \left\{3 \,-\, \frac{1}{n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\right\} .$$

Exercice 58. : On considère la partie

$$A \;=\; \left\{ \left(1 \,+\, \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n \,;\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

de $\mathbb{R}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 59. : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0 ; +\infty [\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les propositions $\mathcal{P} := (u$ est de Cauchy$)$,

$$\mathcal{Q} \;:=\; \Big(\forall \epsilon > 0 \,, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,; \quad \forall n \in D \,, \quad (n \,\geq\, N) \;\Longrightarrow\; \big(\forall p \in \mathbb{N} \,, \quad |u_{n+p} \,-\, u_n| \;<\; \epsilon \big) \Big)$$

et

$$\mathcal{R} \;:=\; \Big(\forall \epsilon > 0 \,, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,; \quad \forall (n;p) \in D \times \mathbb{N} \,, \quad (n \,\geq\, N) \;\Longrightarrow\; \big(|u_{n+p} \,-\, u_n| \;<\; \epsilon \big) \Big) \,.$$

On établit ici les équivalences $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \mathcal{R}$.

1. Montrer l'implication : $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
2. Montrer l'implication : $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}$.
3. Montrer l'implication : $\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{P}$.

Exercice 60. : Soit $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par, pour $n \geq 1$,

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Soit $t = (t_n)_{n \in [\![2 ; +\infty [\![}$ la suite définie par, pour $n \geq 2$,

$$t_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} \,-\, \frac{1}{k} \right) \,.$$

1. Pour $k \in [\![2 ; +\infty [\![$, vérifier que
$$\frac{1}{k^2} \;\leq\; \frac{1}{k-1} \,-\, \frac{1}{k}$$
2. Soit $n \geq 2$. Donner une formule explicite de t_n en fonction de n. En déduire que t converge vers 1.
3. Soit $n \in [\![2 ; +\infty [\![$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$|s_{n+p} \,-\, s_n| \;\leq\; t_{n+p} \,-\, t_n \,.$$

4. On montre ici que s est une suite de Cauchy.

   a). Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $|t_{n+p} - t_n| < \epsilon$.

   b). En déduire que, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$.

   c). Conclure.

5. En déduire que s converge. Montrer que $\lim s \in]1; 2]$.

Exercice 61. : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Montrer que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

Exercice 62. : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Montrer que u est bornée.

Exercice 63. : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui admet une sous-suite convergeant vers un certain $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer que u converge aussi vers ℓ.

Exercice 64. : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de Cauchy complexe. Montrer que les suites réelles $\mathrm{Re}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont des suites de Cauchy.