3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles.

On revient dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les suites réelles, un pendant de la proposition 3.41 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la **convention** que l'on a prise au paragraphe 1.2 : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 3.43. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors u est strictement supérieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n > b$.*
2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors u est strictement inférieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n < b$.*
3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors u est bornée.*
4. *On suppose que u est inférieure à v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par u et v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n \leq v_n$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par u à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $x_n \leq v_n$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 3.43 à u (ou à u et v) que si l'on sait déjà que u a une limite (ou que u et v ont une limite).
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) sont infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$), alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$), alors u est strictement négative à partir d'un certain rang.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités $u_n \leq v_n$, qui sont vraies à partir d'un certain rang. Si l'on suppose que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit $u = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (0)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0 = v_n$. On a bien l'existence de $\lim u$ et de $\lim v$ mais $\lim u = 0 = \lim v$. La proposition ($\lim u > \lim v$) est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $n \to \infty$ dans des inégalités strictes, on tombe sur une inégalité large.
On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des suites est constante. Par exemple, si l'on considère une suite réelle positive qui converge alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec u constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les suites u et v jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $u = -v$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $n \in D$, les équivalences

$$(u_n \leq x_n \leq v_n) \iff (-v_n \leq x_n \leq v_n) \iff (|x_n| \leq v_n) . \tag{3.37}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 3.40.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Preuve de la proposition 3.43 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(\ell - b)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (\ell - b)/2[)$ centré en ℓ.
   Cas où $\ell = +\infty$. L'ensemble V est un voisinage de $+\infty$.
   Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in v$, ce qui donne $u_n > b$.

À lire.

2. Soit $V :=] - \infty; b[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(b - \ell)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (b - \ell)/2[)$ centré en ℓ.
   Cas où $\ell = -\infty$. L'ensemble V est un voisinage de $-\infty$.
   Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n < b$.
3. Comme $\ell \in \mathbb{R}$, u est majorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, d'après 1. Comme on l'a vu au paragraphe 3.3.2, cela prouve que u est majorée. En utilisant 2 avec $b = \ell - 1$, on obtient que u est minorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi minorée, en utilisant encore le paragraphe 3.3.2. u est donc bornée.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. On montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=] - \infty; b[$ est un voisinage de ℓ'.
   Cas où $\ell = +\infty$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell'$. V est un voisinage de $\ell = +\infty$. Si $\ell' = -\infty$, V' est un voisinage de ℓ'. Si $\ell' \in \mathbb{R}$, on a, comme $b > \ell'$, $b - \ell' > 0$ et V' contient l'intervalle $I(\ell'; b - \ell'[$ centré en ℓ', donc V' est un voisinage de ℓ'.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > b > \ell'$. Comme précédemment, V' est un voisinage de ℓ'. On a $\ell - b > 0$ et L contient l'intervalle $I(\ell; \ell - b[$ centré en ℓ, donc V est un voisinage de ℓ.
   Comme $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$, il existe $(N_1; N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que, V contient les termes de u à partir du rang N_1 et V' contient les termes de v à partir du rang N_2. Soit $n \in D$ tel que $n \geq \max(N; N_1; N_2)$. On a donc $u_n \leq v_n$, car $n \geq N$, $u_n \in V$, car $n \geq N_1$ et $v_n \in V'$, car $n \geq N_2$. Donc $v_n < b < u_n$ et $u_n \leq v_n$, contradiction. Conclusion : $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (3.26) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim u$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\ell = \lim v$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N' = \max(N; N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, comme $n \geq N$, $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, en utilisant la proposition 2.7,
   $$\ell - \epsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < \ell + \epsilon \,,$$
   c'est-à-dire $x_n \in I(\ell; \epsilon[$. On a montré (3.26) avec u remplacée par x, donc $\lim x$ existe et vaut ℓ.

À lire.

6. On montre (3.28) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
   $$x_n \geq u_n > L \,.$$
   Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (3.29) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim v = -\infty$, le voisinage $] - \infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à

À lire.

partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,

$$x_n \leq v_n < -L .$$

Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$. $\square$

Maintenant, on reprend la situation de la proposition 3.41 mais pour des suites réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 3.44. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

- *a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim(u + v) = \ell$;*
- *b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim(u + v) = \ell$;*
- *c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim(\lambda u) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim(\lambda u) = -\ell$;*
- *d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim(\lambda u) = 0$;*
- *e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim(uv) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim(uv) = -\ell$;*
- *f). La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et $\lim(1/u) = 0$.*
- *g). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = +\infty$.*
- *h). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = -\infty$.*

Quelques précisions s'imposent.
Pour $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, $-\ell$ signifie $+\infty$ si $\ell = -\infty$ et $-\ell$ signifie $-\infty$ si $\ell = +\infty$.
Dans le cas où $\ell' = -\ell$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, le résultat ne dit rien sur la suite $(u + v)$. La raison en est que tout peut se passer : On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = 0$. Plus généralement, étant donné $m \in \mathbb{R}$, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = m$. On peut aussi construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = +\infty$ ("u l'emporte sur v"). On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = -\infty$ ("v l'emporte sur u"). Enfin, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $(u + v)$ n'a pas de limite. C'est pourquoi l'on qualifie cette situation ($\ell' = -\ell$ pour $(u + v)$) comme indéterminée.
Une autre situation indéterminée est la suivante : $\ell' = 0$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ pour uv. Là encore, on peut donner des exemples de suites réelles u et v telles que leur produit tend vers un nombre réel non nul, ou bien telles que leur produit tend vers 0, ou bien telles que leur produit tend vers ℓ, ou bien telles que leur produit tend vers $-\ell$, ou encore telles que leur produit n'a pas de limite.
En utilisant le théorème des gendarmes, on peut montrer que la suite $w = ((-1)^n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Comme tous les termes de w sont non nuls, $(1/w)$ est bien définie mais on peut vérifier qu'elle n'a pas de limite.

Preuve de la proposition 3.44 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ et où $\ell = -\infty$.
Cas $\ell = +\infty$: On montre que $\lim(u + v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.28) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.28), que le voisinage $]L'; +\infty[$ de $+\infty$, avec $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.25) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n > L' + (\ell' - 1) \geq (L - \ell' + 1) + (\ell' - 1) = L .$$

On a montré que $\lim(u + v) = +\infty$.

À lire.

Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim(u + v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée

À lire.

par $u+v$. Soit $L>0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]-\infty; -L'[$ de $-\infty$, avec $L' = \max(1; A+\ell'+1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.25) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell'-1; \ell'+1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L' + (\ell'+1) \leq -(L+\ell'+1) + (\ell'+1) = -L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

b). On sépare les cas où $\ell = \ell' = +\infty$ et où $\ell = \ell' = -\infty$.

Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim(u+v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.28) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L>0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.28), que le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = +\infty$, on sait, par la proposition (3.28) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]0; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n > L + 0 = L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = +\infty$.

À lire.

Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L>0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = -\infty$, on sait, par la proposition (3.29) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]-\infty; 0[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L + 0 = -L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

c). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.

À lire.

Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.28) avec u remplacée par (λu). Soit $L>0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.28), que le voisinage $]L/\lambda; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n > \lambda \cdot \frac{L}{\lambda} = L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.

Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par (λu). Soit $L>0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par la proposition (3.28), que le voisinage $]L/|\lambda|; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{L}{|\lambda|} = -L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle converge vers 0.

e). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.

Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_1.

Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que v est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.

À lire.

Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.43, que v est strictement

À lire.

inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.43), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.

f). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.25).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]1/\epsilon; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/u_n) < \epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.

g). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement positive à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.28).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n > 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) > L$. On a montré que $\lim(1/w) = +\infty$.

À lire.

h). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement négative à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.29).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n < 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < -w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) < -L$. On a montré que $\lim(1/w) = -\infty$. □

On revient maintenant sur les notions de bornes supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, que l'on a introduites au paragraphe 1.2. On rappelle que l'on a décidé, par **convention**, que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Ainsi, pour une partie A non vide de $\mathbb{R}$, $+\infty$ est un majorant de A et $-\infty$ est un minorant de A (cf. paragraphe 1.2).

Proposition 3.45. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
$\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.
$\ell = \inf A$ si et seulement si ℓ minore A et s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.

Preuve :

a). On montre la première équivalence dans le cas $\ell = +\infty$.
$\Longrightarrow)$: On suppose que $\sup A = +\infty$. Par définition, cela signifie que A est non majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n n'est pas un majorant de A donc il existe au moins un $a_n \in A$ tel que $a_n > n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43), $\lim a = +\infty$. Enfin, $+\infty$ est bien un majorant de A.
$\Longleftarrow)$: On suppose que $+\infty$ est limite d'une suite a d'éléments de A. On montre que A est non majorée. Supposons que A soit majorée par $m \in \mathbb{R}$. Comme $]m; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$, il contient tous les termes de la suite a à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Un tel terme de a est strictement supérieur à m et, comme il est dans A, il est aussi inférieur ou égal à m. Contradiction. Donc A n'est pas majorée et $\sup A = +\infty$.

b). On montre la première équivalence dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow)$: On suppose que $\sup A = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell - (1/n) < \ell$ et ℓ est le plus petit majorant de A, $\ell - (1/n)$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n > \ell - (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ majore A, on a $a_n \leq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell - \frac{1}{n} < a_n \leq \ell .$$

Comme la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite $(\ell - (1/n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41). Comme la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ, on a, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.43), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un majorant

Hors programme.

Hors programme.

de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que ℓ est limite d'une suite $a : D \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de A et que ℓ majore A. On montre que ℓ est le plus petit majorant de A. Soit $m \in \mathbb{R}$ un majorant de A. Pour tout $n \in D$, $a_n \in A$ donc $a_n \leq m$. Comme a converge vers ℓ, on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. le 4 de la proposition 3.43). On obtient $\ell \leq m$. Donc ℓ est inférieur ou égal à tout majorant de A donc c'est le plus petit. D'où $\ell = \sup A$.

c). On montre la deuxième équivalence dans le cas $\ell = -\infty$.

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A = -\infty$. Par définition, cela signifie que A est non minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ n'est pas un minorant de A donc il existe au moins un $a_n \in A$ tel que $a_n < -n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41), $\lim_n(-n) = -\infty$, et, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.43), $\lim a = -\infty$. Enfin, $-\infty$ est bien un minorant de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que $-\infty$ est limite d'une suite a d'éléments de A. On montre que A est non minorée. Supposons que A soit minorée par $m \in \mathbb{R}$. Comme $]-\infty; m[$ est un voisinage de $-\infty$, il contient tous les termes de la suite a à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Un tel terme de a est strictement inférieur à m et, comme il est dans A, il est aussi supérieur ou égal à m. Contradiction. Donc A n'est pas minorée et $\inf A = -\infty$.

d). On montre la deuxième équivalence dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell + (1/n) > \ell$ et ℓ est le plus grand minorant de A, $\ell + (1/n)$ n'est pas un minorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n < \ell + (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ minore A, on a $a_n \geq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell + \frac{1}{n} > a_n \geq \ell .$$

Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite $(\ell + (1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41). Comme la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ, on a, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.43), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un minorant de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que ℓ est limite d'une suite $a : D \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de A et que ℓ minore A. On montre que ℓ est le plus grand minorant de A. Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A. Pour tout $n \in D$, $a_n \in A$ donc $a_n \geq m$. Comme a converge vers ℓ, on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. le 4 de la proposition 3.43). On obtient $\ell \geq m$. Donc ℓ est supérieur ou égal à tout minorant de A donc c'est le plus grand. D'où $\ell = \inf A$. □

Ce résultat permet de justifier aisément quelques calculs de bornes, dans le cas où ses bornes ne sont ni un maximum ni un minimum. Par exemple, on devine que $\inf]0;1] = 0$. On voit que 0 minore l'ensemble $]0;1]$. De plus, 0 est aussi la limite de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est une suite d'éléments de $]0;1]$. Donc, par la proposition 3.45, on obtient $\inf]0;1] = 0$.

Pour déterminer rigoureusement la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et explicite de $\mathbb{R}$, on dispose donc, après avoir deviné ladite borne, de la proposition 3.45 lorsque ce n'est pas un maximum (resp. un minimum) et de la proposition 1.5 s'il s'agit d'un maximum (resp. un minimum).

On donne le résultat important suivant d'existence de limite pour les suites monotones.

Proposition 3.46. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle monotone. Alors $\lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Plus précisément,*

1. *si u est croissante alors $\lim u = \sup u$, où $\sup u := \sup u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$;*
2. *si u est décroissante alors $\lim u = \inf u$, où $\inf u := \inf u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.*

Preuve : On rappelle que $u(D)$ est la partie non vide $\{u_n; n \in D\}$ de $\mathbb{R}$.

a). Cas où u est croissante et $\sup u(D) = +\infty$. On montre que $\lim u = +\infty$ en utilisant (3.28).

Soit $L > 0$. Comme $\sup u(D) = +\infty$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$

d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $+\infty$. Le voisinage $]L;+\infty[$ de $+\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} > L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > L$. On a montré $\lim u = +\infty$.

À lire.

b). Cas où u est décroissante et $\inf u(D) = -\infty$. On montre que $\lim u = -\infty$ en utilisant (3.29). Soit $L > 0$. Comme $\inf u(D) = -\infty$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $-\infty$. Le voisinage $]-\infty;-L[$ de $-\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} < -L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < -L$. On a montré $\lim u = -\infty$.

c). Cas où u est croissante et $\ell := \sup u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.26). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \sup u(D)$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell;\epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell;\epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > \ell - \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \leq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). On a montré $\lim u = \ell = \sup u(D)$.

À lire.

d). Cas où u est décroissante et $\ell := \inf u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.26). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \inf u(D)$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell;\epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell;\epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < \ell + \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \geq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). On a montré $\lim u = \ell = \inf u(D)$. $\square$

On utilise parfois cette proposition 3.46 en conjonction avec la proposition 3.43. Par exemple, si l'on considère une suite croissante $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors la proposition 3.46 nous donne l'existence de la limite ℓ de u et, comme $u_n \geq u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut passer à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 3.46) pour obtenir que $\ell \geq u_0$. En utilisant que $u_n \geq u_{2022}$ est vrai à partir d'un certain rang (par exemple le rang 2022), on obtient de même que $\ell \geq u_{2022}$.

On termine ce paragraphe par un autre résultat important qui concerne les suites réelles "adjacentes".

Définition 3.47. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante,*

$$\forall n \in D\,, \quad u_n \leq v_n \tag{3.38}$$

et la suite $(u_n - v_n)_{n \in D}$ tend vers 0.

Théorème 3.48. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles adjacentes $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors elles convergent vers la même limite, i.e. il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim u = \ell = \lim v$.*

Preuve : Soit $n_0 = \min D$ (cf. proposition 1.13). Pour $n \in D$, on a $u_n \leq v_{n_0}$ d'après (3.38) et la décroissance de v. On a aussi $u_{n_0} \leq v_n$ d'après (3.38) et la croissance de u. Donc u est majorée par v_{n_0} et v est minorée par u_{n_0}. Donc $\ell := \sup u$ et $\ell' = \inf v$ sont réels. De plus, par la proposition 3.23 et les monotonies de u et v, $\lim u$ existe et vaut ℓ et $\lim v$ existe et vaut ℓ'. Comme, pour tout $n \in D$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$, et comme la suite $(u_n - v_n)_{n \in D}$ tend vers 0, on a, par somme (cf. la proposition 3.41), $\ell = 0 + \ell' = \ell'$. $\square$

3.7 Limite d'une suite et sous-suites.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement des sous-suites d'une suite ayant une limite, finie ou infinie. On donne aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On vérifie d'abord qu'une extractrice, qui est une suite réelle, tend forcément vers $+\infty$. On traite d'abord le cas d'une extractrice définie sur $\mathbb{N}$.

Proposition 3.49. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors, on a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \varphi(n) \;\geq\; n\,. \tag{3.39}$$

En particulier, $\lim \varphi$ *existe et vaut* $+\infty$*.*

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (\varphi(n) \geq n)$. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et 0 est le minimum de $\mathbb{N}$, $\varphi(0) \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme φ est strictement croissante et $n+1 > n$, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a donc $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1 \geq n+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc (3.39).
Comme $\lim n = +\infty$, (3.39) et le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43 avec $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = \varphi$) montrent que $\lim \varphi$ existe et vaut $+\infty$. $\square$

On traite maintenant le cas général.

Proposition 3.50. *Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors* $\lim \varphi$ *existe et vaut* $+\infty$*.*

Hors progran

Preuve : Comme φ est une suite réelle croissante, $\lim v$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et vaut $\sup \varphi(D')$, par la proposition 3.46. Montrons que $\sup \varphi(D') = +\infty$.
Supposons que $\varphi(D')$, qui est une partie de $\mathbb{N}$, soit finie. Alors, par la définition 1.11, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ deux à deux distincts de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(D') = \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. Comme $\varphi : D' \longrightarrow \varphi(D')$ est bijective, on a, en notant par ψ sa bijection réciproque, $D' = \{\psi(a_j); j \in [\![1;p]\!]\}$. Donc D' est finie (cf. définition 1.11). Contradiction. On a donc montré que $\varphi(D')$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D'après le 3 de proposition 1.13, $\varphi(D')$ n'est pas majorée. Donc $\sup \varphi(D') = +\infty$. $\square$

Proposition 3.51. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les deux situations :*

1. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère un $\ell \in \mathbb{C}$.*
2. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

Dans ces deux cas, on a l'équivalence suivante :

$$\Big(\lim u \text{ existe et vaut } \ell\Big) \iff \Big(\text{pour toute sous-suite } v \text{ de } u\,, \quad \big(\lim v \text{ existe et vaut } \ell\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre les deux implications.
$\Longleftarrow$) : On suppose que toute sous-suite de u tend vers ℓ. Or u est une sous-suite de u puisque $u = u \circ \mathrm{Id}_D$, où $\mathrm{Id}_D : D \longrightarrow D$ donnée par $\mathrm{Id}_D(n) = n$, et que Id_D est strictement croissante. Donc u tend vers ℓ.
$\Longrightarrow$) : On suppose que u tend vers ℓ. Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ une sous-suite de u. Il existe donc une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$. Montrons que v tend vers ℓ en utilisant (3.20) avec u remplacée par v.
Cas où $D' = \mathbb{N}$: Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.20)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_0$, on a $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec, d'après la proposition 3.49, $\varphi(n) \geq n \geq N_0$. Donc $v_n \in V$. On a montré $\lim v = \ell$ via (3.26) ou (3.27).

Hors programme.

Cas général : Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.26) ou (3.27)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Comme $[N_0; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ et comme $\lim \varphi = +\infty$ par la proposition 3.50, $[N_0; +\infty[$ contient tous les termes de φ à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in D'$ avec $n \geq N_1$. On a donc $\varphi(n) \in [N_0; +\infty[$ soit $\varphi(n) \geq N_0$. Comme φ est à valeurs dans D et $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a $v_n \in V$. On a montré $\lim v = \ell$ via (3.20). □

Une première application importante de cette proposition 3.51 consiste à utiliser l'implication "$\Longrightarrow$". Si l'on souhaite étudier une suite et qu'on vérifie qu'elle est une sous-suite d'une suite ayant une limite, cette implication nous donne tout de suite que la suite étudiée tend vers la limite de l'autre suite. Par exemple, la suite $w = ((2n+5)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(1/p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, qui converge vers 0, donc w converge aussi vers 0.
On peut aussi exploiter l'implication "$\Longleftarrow$" de la proposition 3.51. Pour montrer qu'une suite u n'a pas de limite, on suppose par l'absurde qu'elle en a une et on essaye de produire deux sous-suites v et w de u telles que, au choix :
— $\lim v$ et $\lim w$ existent mais sont différentes ;
— v ou w n'a pas de limite.
Voyons un exemple simple. On a déjà montré plus haut (cf. paragraphe 3.4.1) que la suite réelle $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Redémontrons ce résultat en utilisant la stratégie que l'on vient d'esquisser. On suppose que $\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de x tendent aussi vers $\lim x$, d'après la proposition 3.51. La suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$, donc cette suite converge vers 1. La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = (-1)\cdot((-1)^2)^n = -1$, donc cette suite converge vers -1, qui est différent de 1. On a donc une contradiction avec le fait que ces suites doivent tendre vers la même limite. L'hypothèse "$\lim x$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty; +\infty\}$" est donc fausse et on a montré que x n'a pas de limite.

Grâce à cette proposition 3.51, combinée avec des résultats précédents, on peut montrer le résultat suivant sur les suites géométriques.

Proposition 3.52. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère les suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ données par, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = z^n \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k .$$

On a :

1. *Si $|z| < 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 0 et $\lim s$ existe et vaut $(1-z)^{-1}$.*
2. *Si $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$ alors $\lim u$ n'existe pas et $\lim s$ n'existe pas.*
3. *Si $z = x \in \mathbb{R}^+$ et $x > 1$ alors $\lim u$ et $\lim s$ existent et valent $+\infty$.*
4. *Si $z = 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 1 et $\lim s$ existe et vaut $+\infty$.*

Preuve : Par la proposition 3.10, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 1$, $s_n = n + 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \neq 1$,

$$s_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{z^n - 1}{z - 1} . \tag{3.40}$$

De plus, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u (car $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ est une extractrice), qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = z \cdot u_n . \tag{3.41}$$

1. Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$ (d'après les propositions 3.46 et 3.43). Comme $(|z|^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.51. On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |z|^{n+1} = |z| \cdot |z|^n .$$

Par les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on a donc $\ell = |z| \cdot \ell$ soit $(1-|z|)\ell = 0$. Comme $|z| < 1$, $\ell = 0$. Comme cette suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $|u|$, on obtient par (3.31) que $\lim u$ existe et vaut 0. Par (3.40) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\lim s = (1-z)^{-1}$.

À lire.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$. On suppose que $\ell = \lim u$ existe.
1er cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Par (3.41) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\ell = z \cdot \ell$ soit $(1-z)\ell = 0$. Comme $z \notin \mathbb{R}^+$, $z \neq 1$ d'où $\ell = 0$. Par l'hypothèse et l'implication (3.32), $\lim |u| = |\ell| = 0$. Comme $|z| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1. Donc, par passage à la limite dans les inégalités, $|\ell| \geq 1$. Contradiction avec $\ell = 0$. Donc $\lim u$ n'existe pas.
Supposons que la limite de s existe dans $\mathbb{C}$. Par (3.40), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(z - 1) \cdot s_n + 1 = z^n .$$
Par la proposition 3.41, on aurait $\lim u$ existe et vaut $(z-1)(\lim s) + 1$. Contradiction car u n'a pas de limite.
2ième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $z = x \in \mathbb{R}^{-*}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Si $\ell = +\infty$ alors, par (3.41) et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.44), on obtient $-\infty = +\infty$. Contradiction. Si $\ell = -\infty$, on obtient de même $+\infty = -\infty$. Contradiction. Donc $\ell \in \mathbb{R}$. Encore par (3.41) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\ell = x \cdot \ell$ soit $(1-x)\ell = 0$. Comme $x \neq 1$, $\ell = 0$. Par l'argument du cas précédent, on tombe aussi sur une contradiction. Donc $\lim u$ n'existe pas.
Supposons que la limite de s existe dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Par (3.40), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(x - 1) \cdot s_n + 1 = x^n .$$
Par la proposition 3.44, on aurait $\lim u$ existe car $x \neq 1$. Contradiction car u n'a pas de limite.
3. Prenons $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Donc u est strictement croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, par la proposition 3.46. Par (3.41) et les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41 ou proposition 3.44), on a $\ell = x \cdot \ell$ avec $x > 1$. Nécessairement $\ell = +\infty$. Par (3.40) avec $z = x$ et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.44), on obtient $\lim s = +\infty$.
4. Prenons $z = 1$. u est alors la suite constante égale à 1 donc converge vers 1. s est une sous-suite de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui tend vers $+\infty$, donc s tend aussi vers $+\infty$, par la proposition 3.51. □

On a vu plus haut qu'une suite réelle convergente est forcément bornée (cf. le 3 de la proposition 3.43). Mais une suite réelle bornée n'est pas forcément convergente comme le montre le contre-exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien bornée mais n'a pas de limite (cf. paragraphe 3.4.1). Cependant, une suite réelle bornée admet toujours une sous-suite convergente, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.53. Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit :*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que $u \circ \varphi$ soit convergente.

On retrouve ici la difficulté signalée dans la remarque 3.3. On utilise un procédé de dichotomie.

Preuve du théorème 3.53 : Par hypothèse, il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que a minore u et b majore u. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe $3(n+1)$ applications $a^{(j)}$, $b^{(j)}$ et $v^{(j)}$, pour $j \in [\![0; n]\!]$, telles que, pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, $a^{(j)} : [\![0; j]\!] \longrightarrow [a; b]$ est croissante, $b^{(j)} : [\![0; j]\!] \longrightarrow [a; b]$ est décroissante, $a^{(j)} \leq b^{(j)}$, $a^{(0)}(0) = a$, $b^{(0)}(0) = b$, $0 \leq b^{(j)}(j) - a^{(j)}(j) \leq (b-a)2^{-j}$, l'intervalle $[a^{(j)}(j); b^{(j)}(j)]$ contient une infinité de termes de la suite u, $v^{(j)} : [\![0; j]\!] \longrightarrow D$ est strictement croissante et $u(v^{(j)}(j)) \in [a^{(j)}(j); b^{(j)}(j)]$ et, si $j \geq 1$, la restriction de $a^{(j)}$ à $[\![0; j-1]\!]$ est égale à $a^{(j-1)}$, celle de $b^{(j)}$ est égale à $b^{(j-1)}$ et celle de $v^{(j)}$ est égale à $v^{(j-1)}$.
Soit $a^{(0)} : [\![0; n]\!] \longrightarrow [a; b]$ définie par $a^{(0)}(0) = a$ et $b^{(0)} : [\![0; n]\!] \longrightarrow [a; b]$ définie par $b^{(0)}(0) = b$. On a $a^{(0)} \leq b^{(0)}$ et $0 \leq b^{(0)}(0) - a^{(0)}(0) = b - a \leq (b-a)2^{-0}$. Comme a minore u et b majore u,

Hors programme.

$[a^{(0)}(0); b^{(0)}(0)] = [a;b]$ contient tous les termes de la suite u donc une infinité. Soit $v^{(0)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow D$ définie par $v^{(0)}(0) = \min D$. On a $u(v^{(0)}(0)) \in [a;b] = [a^{(0)}(0); b^{(0)}(0)]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, on a des applications $a^{(j)}$, $b^{(j)}$ et $v^{(j)}$, pour $j \in [\![0;n]\!]$, vérifiant les propriétés dans $\mathcal{P}(n)$. En particulier, $[a^{(n)}(n); b^{(n)}(n)]$ contient une infinité de termes de la suite u donc l'ensemble

$$C_n \ := \ \Big\{ p \in D;\ u_p \in \big[a^{(n)}(n); b^{(n)}(n)\big] \Big\}$$

est une partie infinie de D.
On définit trois applications $a^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$, $b^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$ et $v^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow D$ de la façon suivante :

a). Sur $[\![0;n]\!]$, $a^{(n+1)}$ coïncide avec $a^{(n)}$, $b^{(n+1)}$ coïncide avec $b^{(n)}$ et $v^{(n+1)}$ coïncide avec $v^{(n)}$. En particulier, $a^{(n+1)}(0) = a^{(n)}(0) = a$ et $b^{(n+1)}(0) = b^{(n)}(0) = b$, par l'hypothèse de récurrence. Soit

$$A_n \ := \ \Big\{ p \in D;\ u_p \in \big[a^{(n)}(n); (a^{(n)}(n) + b^{(n)}(n))/2\big] \Big\} \ \subset \ C_n\,.$$

b). Si A_n est infini, on pose $a^{(n+1)}(n+1) = a^{(n)}(n) \in [a;b]$, $b^{(n+1)}(n+1) = (a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2 \in [a;b]$. En particulier

$$C_{n+1} \ := \ \Big\{ p \in D;\ u_p \in \big[a^{(n+1)}(n+1); b^{(n+1)}(n+1)\big] \Big\} \ = \ A_n$$

donc C_{n+1} est une partie infinie de C_n. Comme C_{n+1} est infini, $C_{n+1} \cap \,]\!]v^{(n)}(n)\,; +\infty[\![$ est non vide et on pose

$$v^{(n+1)}(n+1) = \min\Big(C_{n+1} \cap \,]\!]v^{(n)}(n)\,; +\infty[\![\Big)\,.$$

En particulier, $v^{(n)}(n) < v^{(n+1)}(n+1)$, $a^{(n)}(n) \leq a^{(n+1)}(n+1) \leq b^{(n+1)}(n+1) \leq b^{(n)}(n)$ et

$$b^{(n+1)}(n+1) - a^{(n+1)}(n+1) \leq (b^{(n)}(n) - a^{(n)}(n))/2 \ \leq \ (b-a)\cdot 2^{-n-1}\,,$$

par l'hypothèse de récurrence.

c). Si A_n est fini, on pose $a^{(n+1)}(n+1) = (a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2 \in [a;b]$, $b^{(n+1)}(n+1) = b^{(n)}(n) \in [a;b]$. En particulier $C_n = A_n \cup C_{n+1}$ où

$$C_{n+1} \ := \ \Big\{ p \in D;\ u_p \in \big[a^{(n+1)}(n+1); b^{(n+1)}(n+1)\big] \Big\}\,.$$

Donc C_{n+1} est une partie infinie de C_n. Comme C_{n+1} est infini, $C_{n+1} \cap \,]\!]v^{(n)}(n)\,; +\infty[\![$ est non vide et on pose

$$v^{(n+1)}(n+1) = \min\Big(C_{n+1} \cap \,]\!]v^{(n)}(n)\,; +\infty[\![\Big)\,.$$

En particulier, $v^{(n)}(n) < v^{(n+1)}(n+1)$, $a^{(n)}(n) \leq a^{(n+1)}(n+1) \leq b^{(n+1)}(n+1) \leq b^{(n)}(n)$ et

$$b^{(n+1)}(n+1) - a^{(n+1)}(n+1) \leq (b^{(n)}(n) - a^{(n)}(n))/2 \ \leq \ (b-a)\cdot 2^{-n-1}\,,$$

par l'hypothèse de récurrence.

On a donc bien $3((n+1)+1)$ applications $a^{(j)}$, $b^{(j)}$ et $v^{(j)}$, pour $j \in [\![0;n+1]\!]$, telles que, pour $j \in [\![0;n+1]\!]$, $a^{(j)} : [\![0;j]\!] \longrightarrow [a;b]$ est croissante, $b^{(j)} : [\![0;j]\!] \longrightarrow [a;b]$ est décroissante, $a^{(j)} \leq b^{(j)}$, $a^{(0)}(0) = a$, $b^{(0)}(0) = b$, $0 \leq b^{(j)}(j) - a^{(j)}(j) \leq (b-a)2^{-j}$, l'intervalle $[a^{(j)}(j); b^{(j)}(j)]$ contient une infinité de termes de la suite u, $v^{(j)} : [\![0;j]\!] \longrightarrow D$ est strictement croissante et $u(v^{(j)}(j)) \in [a^{(j)}(j); b^{(j)}(j)]$. De plus, si $j \in [\![1;n+1]\!]$, la restriction de $a^{(j)}$ à $[\![0;j-1]\!]$ est $a^{(j-1)}$, celle de $b^{(j)}$ est $b^{(j-1)}$ et celle de $v^{(j)}$ est $v^{(j-1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ définie par $\alpha_n = a^{(n)}(n)$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ définie par $\beta_n = b^{(n)}(n)$, où $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ sont

Hors programme.

Hors programme.

données par $\mathcal{P}(n)$. On vérifie que α et β sont adjacentes (cf. définition 3.47).
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après $\mathcal{P}(n+1)$, $a^{(n+1)}$ est croissante donc

$$\alpha_n \;=\; a^{(n)}(n) \;=\; a^{(n+1)}(n) \;\leq\; a^{(n+1)}(n+1) \;=\; \alpha_{n+1}$$

et $b^{(n+1)}$ est décroissante donc

$$\beta_n \;=\; b^{(n)}(n) \;=\; b^{(n+1)}(n) \;\geq\; b^{(n+1)}(n+1) \;=\; \beta_{n+1}\,.$$

Donc α est croissante et β est décroissante. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$0 \;\leq\; b^{(n)}(n) - a^{(n)}(n) \;=\; \beta_n - \alpha_n \;=\; b^{(n)}(n) - a^{(n)}(n) \;\leq\; \frac{b-a}{2^n}\,.$$

Comme $0 \leq |1/2| = (1/2) < 1$, $\lim_n 2^{-n} = 0$, par la proposition 3.52. Par produit (cf. proposition 3.41, $\lim_n (b-a)2^{-n} = 0$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), $\lim(\beta - \alpha)$ existe et vaut 0. On a montré que α et β sont adjacentes.
Par le théorème 3.48, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\lim \alpha = \ell = \lim \beta$.
On construit maintenant une sous-suite de u qui tend vers ℓ. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ définie par $\varphi(n) = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est donnée par $\mathcal{P}(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(n+1)$, $\varphi(n+1) = v^{(n+1)}(n+1) > v^{(n+1)}(n) = v^{(n)}(n) = \varphi(n)$. Donc φ est une extractrice et $u \circ \varphi$ est une sous-suite de u. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(n)$, $\alpha_n \leq (u \circ \varphi)(n) \leq \beta_n$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), $\lim(u \circ \varphi)$ existe et vaut ℓ. □

3.8 Complément : suites de Cauchy.

On donne ici les notions de suite de Cauchy et de complétude. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.54. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.42}$$

Lorsque D est de la forme $[\![n_0; +\infty[\![$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut donner une formulation équivalente à (3.42), formulation qui est utile dans la pratique.

Proposition 3.55. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. La proposition* (3.42) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (n;p) \in D \times \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies \big(\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,.$$

Preuve : Appelons $\mathcal{Q}$ la nouvelle proposition.
(3.42) $\implies \mathcal{Q}$: On suppose (3.42) vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.43}$$

Soit $n \in D$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $n + p \geq n \geq N$. Comme $D = [\![n_0; +\infty[\![$, $n + p \in D$. Donc, par (3.43) avec $m = n + p$, on obtient $|u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{Q} \implies$ (3.42) : On suppose $\mathcal{Q}$ vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n \geq N) \implies \big(\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,. \tag{3.44}$$

Soit $(m; m') \in D^2$ avec $m \geq N$ et $m' \geq N$. Si $m \geq m'$, on peut écrire $m = m' + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.44) avec $n = m'$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. Si $m < m'$, on peut écrire $m' = m + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.44) avec $n = m$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré (3.42). □

Existe-t-il des suites de Cauchy ? Oui, il y a toutes les suites convergentes comme le montre la :

Hors programme.