Suites.

Exercice 30. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a;b)$.

1. Vérifier que l'on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \; = \; d \cdot a^n \, + \, b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \,. \tag{3}$$
En particulier, lorsque $b = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d \cdot a^n$.

2. Lorsque $a = 1$, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.

3. On suppose $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \; = \; \frac{1 \, - \, a^n}{1 \, - \, a} \; = \; \frac{a^n \, - \, 1}{a \, - \, 1} \,. \tag{4}$$

4. Lorsque $a \neq 1$, donner une expression de u_n en fonction de n, qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n \; = \; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n-k} \; = \; \sum_{\ell=0}^{n} C_\ell^n \cdot a^{n-\ell} \cdot b^\ell \,, \tag{5}$$
où, pour $k \in [\![0;n]\!]$,
$$C_k^n \; := \; \frac{n!}{(k!) \cdot \big((n-k)!\big)} \,.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a^{n+1} \, - \, b^{n+1} \; = \; (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} \,. \tag{6}$$

Exercice 32. : Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \; := \; \frac{1}{n+1} \, - \, \frac{1}{n} \,.$$

1. Vérifier que u est strictement négative.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule explicite en fonction de n de la somme partielle de u :
$$s_n \ := \ \sum_{k=1}^{n} u_k \ .$$

Exercice 33. : On considère les suites $u = (2)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (n^2 - 4n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sont-elles monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles strictement monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles majorées ? Sont-elles minorées ? Sont-elles bornées ? Justifier toute réponse.

Exercice 34. : Soit $u = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que la suite u est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'elle est strictement croissante à partir du rang 1.
2. Montrer que u n'est pas majorée.

Exercice 35. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \ = \ 2^n \quad \text{et} \quad v_n \ = \ \left(2^2\right)^n .$$

1. Vérifier que u est une extractrice.
2. Vérifier que v est une sous-suite de u.
3. La suite v est-elle égale à la sous-suite $(u \circ u)$ de u ?

Exercice 36. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. On considère la série associée, à savoir la suite $S = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,
$$S_N \ := \ \sum_{n=0}^{N} u_n \ .$$

1. Déterminer les sous-suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ de la suite S.
2. Vérifier que la suite S est minorée par 0 et majorée par 1.
3. La suite $v = (v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $p \in \mathbb{N}$,
$$v_p \ := \ \sum_{n=0}^{p} u_{2n} \ ,$$
est-elle une sous-suite de la suite S ?