Proposition 3.56. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{K}$. On montre (3.42). Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in D$ avec $p \geq N$, on ait $|u_p - \ell| < (\epsilon/2)$. Soit $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire et la propriété précédente, on a

$$|u_m - u_n| = \big|(u_m - \ell) - (u_n - \ell)\big| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

On a montré (3.42) donc u est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. □

Concernant les suites de Cauchy réelles ou complexes, on a l'important résultat suivant :

Théorème 3.57. *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : Admise. □

L'intérêt principal de ce théorème 3.57 se révèle dans la situation suivante : lorsqu'on étudie la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et qu'on veut montrer qu'elle converge, on a, par la nature des définitions et résultats des paragraphes précédents, besoin de deviner la limite. Ce théorème 3.57 nous permet d'éviter cette contrainte car, pour l'appliquer, il suffit de montrer que la suite est de Cauchy, une notion qui ne fait pas apparaître la limite de la suite. Une bonne partie de l'étude des séries en L2 s'appuira sur cet avantage. Dans ce cours, on s'en servira pour justifier une définition de la fonction exponentielle (cf. paragraphe 9.4).

Depuis le début du cours, on aurait pu travailler avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et définir les notions de suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de convergence dans $\mathbb{Q}$. Un bon nombre de résultats précédents (mais pas tous) seraient encore valables dans ce cas. Mais le théorème 3.57 est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. C'est une des raisons pour lesquelles on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Hors programme.

4 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de cette partie est de construire une notion de limite pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes et d'étudier la notion de continuité qui lui est associée. À la différence des suites, pour lesquelles seule une limite à l'infini a un intérêt, d'autres situations pertinentes apparaissent : limite en un point du domaine de définition, limite au bord de ce domaine, limite à l'infini.

4.1 Propriétés des fonctions.

Comme pour l'étude des suites, on distingue des propriétés communes aux fonctions réelles et aux fonctions complexes d'autres propriétés qui sont propres aux fonctions réelles.

4.1.1 Propriétés générales des fonctions.

Avant tout, on précise les fonctions que l'on va étudier. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une telle application est une fonction réelle. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une telle application est une fonction complexe. On note par $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$.*

Attention : La variable des fonctions considérées sera toujours réelle. Les valeurs sont toutes réelles pour une fonction réelle et toutes complexes pour une fonction complexe.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si l'on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée sans changer "ce que fait la fonction", on change tout de même de fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble de départ, on changera le nom de la fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble d'arrivée, on conservera souvent le nom de la fonction, ce qui constitue un abus de notation.
Pour que les fonctions soient bien définies, on doit veiller à ce que tout élément de l'ensemble de départ soit bien envoyé dans l'ensemble d'arrivée.
On s'intéressera aux fonctions dont le domaine de définition est une partie infinie de $\mathbb{R}$ et, le plus souvent, contient un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

Donnons quelques exemples de telles fonctions :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Par abus, on confondra f_1 et f_2. f_3 est la restriction à $\mathbb{R}^*$ de f_1. D'autres exemples :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x + ix^2 \end{array}.$$

Là encore, on confondra f_4 et f_5.

Comme pour les suites, on commence par définir des opérations sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont définies sur le même domaine de définition.

Définition 4.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) + g(x)$. La fonction h est la somme des fonctions f et g et est notée $h = f + g$.
On définit une nouvelle fonction $k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $k(x) = \lambda \cdot f(x)$. La fonction k est le produit de la fonction f par le scalaire λ et est notée λf ou $\lambda \cdot f$.
Pour $c \in \mathbb{K}$, la fonction $j : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, qui à tout $x \in \mathcal{D}$ associe $j(x) = c$ est appelée la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$.
La fonction nulle sur D est la fonction constante égale à 0 sur $\mathcal{D}$.
Une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur $\mathcal{D}$) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = c$.

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$, alors qu'elles sont différentes.

En considérant $f_7 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_7(x) = x^2$, en plus des fonctions précédentes, on a $f_6 = f_2 + if_7$.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 4.2, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

À lire.

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi + dans $\mathbb{K}$ (cf. paragraphe 1.1), on en déduit ces même propriétés pour la loi + de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. On voit que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est l'élement neutre de la loi + de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. Toute fonction $f \in \mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ admet comme fonction opposée la fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $x \in \mathcal{D}$, $g(x) = -f(x)$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \ 1 \cdot a = a,$$

À lire.

on obtient, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f;g) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{D}})^2$,

$$(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f), (\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f, \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g, 1 \cdot f = f.$$

On a montré que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ muni des lois de la définition 4.2 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Remarque 4.4. *On peut montrer, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.17, que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, si $\mathcal{D}$ est un ensemble infini.*

Voyons maintenant d'autres opérations et propriétés sur les fonctions.

Définition 4.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de f par g est la fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. On note h par fg ou $f \cdot g$.
Soit $\mathcal{D}_0$ une partie non vide de $\mathcal{D}$. La fonction $f_0 : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ qui, à $x \in \mathcal{D}_0$, associe $f(x)$, est la restriction de f à $\mathcal{D}_0$. On note $f_0 = f_{|\mathcal{D}_0}$.
Si $\mathcal{D}_1$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si $h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle dont l'image $h(\mathcal{D}_1)$ est incluse dans $\mathcal{D}$, alors la composition $f \circ h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $(f \circ h)(x) = f(h(x))$.
Soit $|f| : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $(|f|)(x) = |f(x)|$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le module de f et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la valeur absolue de f.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les fonctions réelles $\Re f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\Re f(x) = \Re(f(x))$ et $\Im f(x) = \Im(f(x))$, respectivement, sont les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe f.
On dit que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 si l'on a l'équivalence : $(x \in \mathcal{D}) \iff (-x \in \mathcal{D})$.
On dit que f est (une fonction) paire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est (une fonction) impaire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction module est l'application $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à un complexe z, associe son module $|z|$. Lorsque $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, le module de f, défini dans la définition 4.5, est en fait la composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction module par f.
On a bien sûr la même chose dans $\mathbb{R}$, en remplaçant la fonction module par sa restriction à $\mathbb{R}$, à savoir la fonction valeur absolue. Pour une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, sa valeur absolue est le composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction valeur absolue avec f.
En reprenant les exemples précédents, $f_1 = \Re(f_6)$ et $f_4 = \Im(f_6)$. On a aussi $f_4 = f_1 \cdot f_1 = f_1^2$. On remarque que f_2 est impaire, que f_5 est paire et que f_3 est impaire ($\mathbb{R}^*$, le domaine de définition de f_3, est bien symétrique par rapport à 0).

4.1.2 Propriétés propres aux fonctions réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les fonctions réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f est croissante si

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}^2, \Big((x \le x') \implies (f(x) \le f(x')) \Big).$$

On dit que f est strictement croissante si

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}^2, \Big((x < x') \implies (f(x) < f(x')) \Big).$$

On dit que f est décroissante si

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}^2, \Big((x \le x') \implies (f(x) \ge f(x')) \Big).$$

On dit que f est strictement décroissante si

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big((x \, < \, x') \implies (f(x) \, > \, f(x')) \Big) \, .$$

On dit que f est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}'$ si la restriction $f_{|\mathcal{D}'}$ de f à $\mathcal{D}'$ est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone).

Donnons quelques exemples. Une fonction constante est croissante et aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à x associe x, est strictement croissante. Elle est aussi croissante. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas croissante (ni strictement croissante) puisque $-2 < -1$ et $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$. Elle n'est pas non plus décroissante (ni strictement décroissante) puisque $2 > 1$ et $f(2) = 4 > 1 = f(1)$.

Définition 4.7. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que f est majorée par a si a majore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq a$.
On dit que f est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit majorée par b.
On dit que f est minorée par a si a minore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq a$.
On dit que f est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit minorée par b.
On dit que f est bornée si f est majorée et f est minorée.
Lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.
La borne supérieure de f, notée $\sup f$ est $\sup f(\mathcal{D})$, la borne supérieure de l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f.
La borne supérieure de f, notée $\inf f$ est $\sup f(\mathcal{D})$, la borne supérieure de l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f.

Comme pour les suites, on donne une caractérisation de la bornitude en utilisant la valeur absolue.

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big((f \text{ est bornée}) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R} ; \quad \forall x \in \mathcal{D} \, , \quad \big|f(x)\big| \, \leq \, m\big) \Big) \, .$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow)$: On suppose f bornée. Par la définition 4.7, il existe donc $(m_-;m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $m_- \leq f(x) \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|;|m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a $f(x) \leq m_+ \leq m$ et $-f(x) \leq -m_- \leq m$, donc $|f(x)| = \max(f(x); -f(x)) \leq m$.
$\Longleftarrow)$: On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| \leq m$ soit $f(x) \in I(0;m]$. Par la proposition 2.7 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-m \leq f(x) \leq m$. Donc f est majorée par m et minorée par $-m$. Par la définition 4.7, elle est donc bornée. □

4.2 Limites et continuité de fonction.

On introduit ici la notion de limite pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On commence par donner une définition générale abstraite. Ensuite, on donne une définition équivalente mais plus concrète dans les différents cas : limite finie en un point ; limite finie à l'infini ; limite infinie en un point ; limite infinie à l'infini. On introduit aussi la notion de continuité en un point du domaine de définition.

4.2.1 Définition générale.

Pour une fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, on souhaite donner un sens précis à l'énoncé : "La fonction f tend vers une limite en un certain endroit". La définition choisie devra respecter l'intuition selon laquelle si f tend vers une limite quelque part, elle ne peut y avoir qu'une limite. Cette définition doit aussi refléter le comportement de f à l'endroit choisi.
Par exemple, il n'apparaît pas pertinent de parler de la limite de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en -1, puisque -1 est "loin" du domaine de définition de la fonction. Il s'agit donc de préciser où l'on va considérer une limite pour f.
C'est précisément dans ce but que l'on a introduit la notion de point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.9) et qu'on a indiqué quand $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.13). On va définir la notion de limite d'une fonction en un $a \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à son domaine de définition.
Quelles sont les limites possibles ? Comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera prise parmi les éléments de $\mathbb{K}$ et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on permettra à $+\infty$ et à $-\infty$ d'être une telle limite. On utilise la notion de voisinage associée à de telles limites. Voir les définitions 2.2, 2.5 et 2.11. On renvoie aussi à la remarque 3.31 pour une compilation des principales propriétés de ces voisinages.
On utilise aussi la notion de voisinage associée aux endroits où l'on considère la limite d'une fonction. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, voir la définition 2.5. Lorsque $a \in \{-\infty; +\infty\}$, voir la définition 2.11.

Remarque 4.9. *Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. D'après les propositions 2.6 et 2.12, on sait que l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a et qu'une partie contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a. Si $a \in \mathbb{R}$, tout voisinage de a contient a. Si a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et U est un voisinage de a, on voit, par les propositions 2.6 et 2.12, que a est aussi adhérent à $U \cap \mathcal{D}$.*

Définition 4.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de f en a si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.1}$$

On remarque que la proposition

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.2}$$

signifie $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$.

Si a n'est pas adhérent à $\mathcal{D}$, il existe un voisinage U de a tel que $U \cap \mathcal{D} = \emptyset$ et la proposition (4.2) est vraie quel que soit ℓ et quel que soit $V \in \mathcal{V}$ car le membre de gauche de l'implication est toujours faux. Dans ce cas, tout ℓ serait limite de f en a. Cela ne correspond pas à ce que l'on souhaite pour une limite, c'est pourquoi on a imposé que a soit adhérent à $\mathcal{D}$.
En revanche, si a est adhérent à $\mathcal{D}$, cela implique que, pour tout voisinage U de a, $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. En particulier, pour un tel voisinage U de a, on peut toujours trouver un $x \in \mathcal{D}$ qui vérifie aussi $x \in U$.

Proposition 4.11. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$. Si* (4.1) *est vraie et si* (4.1)*, avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.*

Preuve : On montre que $\ell = \ell'$ par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la remarque 3.31, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de f en a, il existe, d'après (4.1), $U_1 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in A$. Comme ℓ' est limite de f en a, il existe, d'après (4.1) (avec ℓ remplacée par ℓ'), $U_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in B$. Par la remarque 4.9, $U_1 \cap U_2$ est un voisinage de a. Comme a est adhérent à $\mathcal{D}$, $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{D}$ est non vide. Pour $x \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{D}$, on a donc $f(x) \in A$, car $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, et $f(x) \in B$, car $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. On a montré que $\ell = \ell'$. $\square$

Cette proposition permet de parler de “la” limite d’une fonction, lorsqu’elle existe.

Définition 4.12. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. S’il existe ℓ tel que* (4.1) *est vraie, on dit que ℓ est la limite de f en a ou que f tend vers ℓ en a et on note*

$$\ell \;=\; \lim_a f \quad \textit{ou} \quad \ell \;=\; \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

Attention : Il est important de rappeler qu’une fonction peut ne pas avoir de limite en a. La proposition (4.1) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. On verra des exemples plus loin. C’est pourquoi on ne parlera de la limite d’une fonction qu’après avoir démontré (ou supposé) son existence. “Étudier la limite d’une fonction” signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

Que se passe-t-il lorsque $a \in \mathcal{D}$? Bien sûr, a est adhérent à $\mathcal{D}$. La limite en a peut ne pas exister. Si elle existe, en revanche, c’est forcément $f(a)$! C’est ce que l’on montre dans la proposition suivante :

Proposition 4.13. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Si la limite de f en a existe alors elle vaut $f(a)$.*

Preuve : Soit ℓ la limite de f en a. Comme $a \in \mathcal{D}$, $f(a)$ est défini dans $\mathbb{K}$. Supposons $f(a) \neq \ell$. Alors, par la remarque 3.31, il existe $A \in \mathcal{V}_{f(a)}$ et $B \in \mathcal{V}_\ell$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Par (4.1), il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset B$. Comme U est un voisinage de a, il contient a (cf. remarque 4.9). Comme $a \in \mathcal{D}$, $a \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(a) \in B$. Comme A est un voisinage de $f(a)$, A contient $f(a)$ (cf. remarque 3.31). Donc $f(a) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. L’hypothèse $f(a) \neq \ell$ est absurde, donc $f(a) = \ell$. $\square$

Définition 4.14. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$.*
Si la limite de f en a existe (dans ce cas, c’est $f(a)$), on dit que la fonction f est continue en a.
On dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}'$, i.e. si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est continue en a, ou encore si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, $\lim_a f$ existe.
On dit que f est continue si elle est continue sur $\mathcal{D}$.

On donne maintenant une caractérisation séquentielle de la limite d’une fonction. Ce résultat ressemble à la proposition 3.51 sur le lien entre la nature d’une suite et celle de ses sous-suites.

Proposition 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On a l’équivalence :*
(ℓ est limite de f en a)
si et seulement si
(pour toute suite $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ tendant vers a, la suite $f \circ u$ tend vers ℓ).

Preuve : Implicitement ci-dessus, D désigne une partie infinie de $\mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$) : On suppose que ℓ est limite de f en a. Soit $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ une suite tendant vers a. On montre que la suite $f \circ u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ tend vers ℓ en utilisant (3.20) avec u remplacée par $f \circ u$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Comme u tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que U contient tous les termes de u à partir du rang N (cf. (3.20) avec ℓ remplacée par a). Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in U \cap \mathcal{D}$ et, comme $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a donc $f(u_n) \in V$. On a montré que $\ell = \lim(f \circ u)$.
$\Longleftarrow$) : On montre la contraposée : (ℓ n’est pas limite de f en a) $\Longrightarrow$ (il existe une suite $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ qui tend vers a telle que ℓ n’est pas limite de $f \circ u$).

On suppose donc que ℓ n'est pas limite de f en a. En prenant la négation de (4.1), il existe un voisinage V de ℓ tel que

$$\forall U \in \mathcal{V}_a\,, \quad \exists x \in \big(U \cap \mathcal{D}\big)\,; \quad f(x) \notin V\,. \tag{4.3}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère les différentes possibilités pour a.
Si $a \in \mathbb{R}$, $U_p := I(a; 1/p[$ est un voisinage de a.
À lire.
Si $a = +\infty$, $U_p :=]p; +\infty[$ est un voisinage de $a = +\infty$.
Si $a = -\infty$, $U_p :=]-\infty; -p[$ est un voisinage de $a = -\infty$.
D'après (4.3), il existe $u_p \in U_p \cap \mathcal{D}$ tel que $f(u_p) \notin V$. On a ainsi construit une suite $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. On montre que u tend vers a.
Cas où $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|u_p - a| \le (1/p)$. Comme $\lim_p (1/p) = 0$, on déduit du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.40) que u converge vers a.
À lire.
Cas où $a = +\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \ge p$. Comme $\lim_p p = +\infty$, on déduit du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), que $\lim_p u_p = +\infty = a$.
Cas où $a = -\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \le -p$. Comme $\lim_p (-p) = -\infty$, on déduit du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), que $\lim_p u_p = -\infty = a$.
On montre maintenant que la suite $f \circ u$ ne tend pas vers ℓ, en montrant la négation de (3.20), c'est-à-dire

$$\exists V' \in \mathcal{V}_\ell\,; \quad \forall N \in \mathbb{N}\,, \quad \exists n \in \big(\mathbb{N}^* \cap [\![N; +\infty[\![\big)\,; \quad (f \circ u)_n \notin V'\,.$$

Pour le voisinage V de ℓ précédent, on a, pour $N \in \mathbb{N}$, $N+1 \in (\mathbb{N}^* \cap [\![N; +\infty[\![)$ et, d'après la construction de u, $(f \circ u)_{N+1} = f(u_{N+1}) \notin V$. On a montré que $f \circ u$ ne tend pas vers ℓ.
On a donc montré la contraposée annoncée. □

Voyons un exemple simple d'application de ce résultat. Considérons la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On devine que f n'a pas de limite en 0 car “elle saute de -1 à 1”. Montrons cela par l'absurde.
On suppose que $\ell = \lim_a f$ existe. Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n = 1/n$ et $v = -u$. On sait que u tend vers 0. Il en est de même pour v d'après les opérations sur les limites de suite (cf. proposition 3.41). Donc, par l'implication $\Longrightarrow$ de la proposition 4.15, $\lim(f \circ u) = \ell = \lim(f \circ v)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f \circ u)(n) = f(u_n) = f(1/n) = 1$, car $1/n > 0$, et $(f \circ v)(n) = f(v_n) = f(-1/n) = -1$, car $-1/n < 0$. Les suites $(f \circ u)$ et $(f \circ v)$ sont constantes donc $-1 = \lim(f \circ v)$ et $1 = \lim(f \circ u)$. Contradiction car $-1 \neq 1$.
On a bien montré que f n'a pas de limite en a.
On remarque que cet argument est proche de l'utilisation de sous-suites pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, utilisation que l'on a illustrée dans le paragraphe 3.7.

Selon l'intuition, on s'attend à ce que l'on ne change pas la limite d'une fonction en a si l'on change la fonction “loin” de a. C'est ce que démontre la proposition suivante.

Proposition 4.16. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles qu'il existe un voisinage U_0 de a sur lequel f et g coïncident, i.e. telles que

$$\exists U_0 \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in (U_0 \cap \mathcal{D})\,, \quad f(x) \;=\; g(x)\,.$$

Soit h la restriction de f à $U_0 \cap \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \tag{4.4}$$

et

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big)\,. \tag{4.5}$$

Preuve : Par la remarque 4.9, a est adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.

a). On montre (4.4).

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_a f$. On montre que $\ell = \lim\limits_a h$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par h. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $h(x) = f(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap \mathcal{D}$ et $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a $f(x) \in V$. D'où $h(x) = f(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim\limits_a h$.

$\Longleftarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_a h$. On montre que $\ell = \lim\limits_a f$ en utilisant (4.1). Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$ (cf. (4.1) avec f remplacée par h), puisque $\mathcal{D} \cap U_0$ est le domaine de définition de h. Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $f(x) = h(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0))$ et $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$, on a $h(x) \in V$. Donc $f(x) = h(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim\limits_a f$.

b). On montre (4.5). On note que h est aussi la restriction à $\mathcal{D} \cap U_0$ de g. En appliquant (4.4) puis (4.4), avec f remplacée par g, on a

$$\left(\ell = \lim_a f\right) \iff \left(\ell = \lim_a h\right) \iff \left(\ell = \lim_a g\right).$$

On a bien montré (4.5). □

On peut reformuler la définition 4.10 en utilisant la notion suivante :

Définition 4.17. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ dans le sens des Définitions 2.9 et 2.13. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de a dans $\mathcal{D}$ si A est la trace d'un voisinage de a sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire s'il existe un voisinage B de a tel que $A = B \cap \mathcal{D}$ ou encore si

$$\exists\, B \in \mathcal{V}_a\,; \quad A = B \cap \mathcal{D}\,.$$

On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.

Pour ce type de voisinage, on a aussi les propriétés suivantes.

Proposition 4.18. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ dans le sens des Définitions 2.9 et 2.13.*

1. *L'intersection de deux voisinages dans $\mathcal{D}$ de a est un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a, i.e.*

$$\forall\, (A; B) \in (\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}})^2\,, \quad A \cap B \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,.$$

2. *Une partie de $\mathcal{D}$ contenant un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a est elle-même un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\,, \left(\left(\exists\, B \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,;\ B \subset A\right) \Longrightarrow A \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\right).$$

Preuve : On peut suivre la preuve des propositions 2.3 et 2.12. □.

On obtient la reformulation suivante de la définition 4.10.

Proposition 4.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition (4.1) est équivalente à*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \left((x \in W) \Longrightarrow (f(x) \in V)\right) \tag{4.6}$$

et aussi à

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,. \tag{4.7}$$

Hors programme.