ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS – F01, L3

Exercises – Week 9.

Exercice I. Prédateurs et proies : le système de Lotka-Volterra

On considère un écosystème constitué de proies en nombre $x(t)$ au temps t et de prédateurs en nombre $y(t)$ au temps t.
L'évolution du système est régie par les règles suivantes :

- Le *taux* de croissance d'une espèce ($x'(t)/x(t)$ pour les proies, $y'(t)/y(t)$ pour les prédateurs) est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité de cette espèce.
- À chaque fois qu'un prédateur rencontre une proie, il la mange : celle-ci meurt, lui se nourrit. Le taux de rencontre prédateur/proie est supposé proportionnel au produit $x(t)y(t)$.
- Le taux de natalité dépend de la capacité du milieu environnant à fournir de la nourriture à l'espèce considérée. Le milieu dans lequel évoluent les proies et les prédateurs fournit une quantité constante de nourriture aux proies mais rien aux prédateurs : ces derniers se nourrissent uniquement de proies.
- Le taux de mortalité des prédateurs est constant, une proie ne meurt que si elle rencontre un prédateur.

1. Montrer que l'évolution de l'écosystème est régie par les équations
$$\begin{cases} x' = x(A - By), \\ \\ y' = y(Cx - D) \end{cases} \tag{1}$$
où A, B, C, D sont des constantes positives.

2. Soit $H(x, y) = Cx - D\ln(x) + By - A\ln(y)$. Montrer que $H(x, y)$ est une intégrale première du mouvement (c'est-à-dire : si (x, y) vérifie (1), alors $\frac{d}{dt}\left(H(x(t), y(t))\right) = 0$).

3. Montrer que les solutions de (1) sont globales.

4. À quelle condition l'extinction d'une espèce se produit-elle ? Quel est le point d'équilibre (non trivial) $(\bar{x}, \bar{y})$ du système ?

5. Calculer la différentielle du second membre de (1) en ce point. Pouvez-vous conclure à une éventuelle stabilité de ce point d'équilibre ?

6. (Question optionnelle) La fonction H fournit une fonction de Lyapunov pour le système. En utilisant les résultats de l'exercice III de la feuille d'exercice précdente, montrer que l'équilibre $(\bar{x}, \bar{y})$ est stable.

7. On note $R_1, \cdots, R_4$ les domaines définis par

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > D/C, y > A/B\}, \\
R_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < D/C, y > A/B\}, \\
R_3 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < D/C, 0 < y < A/B\}, \\
R_4 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > D/C, 0 < y < A/B\}.
\end{aligned}$$

   Interpréter l'évolution de l'écosystème constitué par les proies et prédateurs dans chaque domaine R_i.

   Faire un dessin : représenter les isoclines du système et l'allure des trajectoires.

8. Il semble que, si on se trouve dans un domaine R_i, la “nature” amène le système dans le domaine R_{i+1} ($1 \leq i \leq 4$, on pose $R_5 = R_1$ ici).

   Justifions rigoureusement ce fait, par exemple pour $i = 1$: soit donc $t_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in R_1$. Montrer que si une trajectoire passe par (x_0, y_0) au temps t_0, il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t_1) = D/C$ et $y(t_1) > A/B$ puis montrer qu'il existe $t_2 > t_1$, tel que $(x, y)(t_2) \in R_2$.

9. * La question qui se pose maintenant est : les trajectoires bouclent-elles, c'est-à-dire les solutions sont-elles périodiques ? Qu'en pensez-vous (et comment l'interprétez-vous) ? Le démontrer.

Exercice II. Champ de vecteur sur la sphere

On note $\mathbb{S}^2$ la sphere unité de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, on note $T_x\mathbb{S}^2$ la direction du plan tangent en x à la sphère dans $\mathbb{R}^3$ (qui, on le rappelle, est $\langle x \rangle^\perp$).

Soit $\mathbf{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \quad \mathbf{v}(x) \in T_x\mathbb{S}^2$$

($\mathbf{v}$ est un *champ de vecteur sur la sphere*). Soit $x_0 \in \mathbb{S}^2$. On considère le système

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \mathbf{v}(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, && (2) \\
x(0) &= x_0. && (3)
\end{aligned}$$

1) Montrer que (2)-(3) admet une unique solution maximale (x, I).

2) Montrer que la trajectoire déterminée par x reste dans $\mathbb{S}^2$. En déduire que la solution est définie globalement.

3) Soit Φ le flot associé à (2). Montrer qu'il définit une application continue $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$.

4) Exemple :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (zx, zy, (z^2 - 1)z).$$

Vérifier que $\mathbf{v}$ est bien un champ de vecteur sur la sphère. Essayer de le représenter. Discuter la situation, entre autre la stabilité/instabilité relativement à la sphère des équilibres que constituent les pôles nord et sud.