ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES – F01, L3

Feuille de TD numéro 7

Approximation numérique des équations différentielles

Exercice 1 (Estimation d'erreur)

On utilise les notations du cours : soit $x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n; h_n)$ une méthode à un pas consistante d'ordre 1.

1. On suppose que Φ est globalement Lipschitz par rapport à x uniformément par rapport à (t, h) : il existe $L > 0$ tel que
$$|\Phi(t, x_1, h) - \Phi(t, x_2, h)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^4.$$
Montrer que la méthode est stable, avec constante e^{LT}.
2. Montrer que l'on a l'estimation
$$|x(t_n) - x_n| \leq e^{LT}(|x(0) - x_0| + Ch) \tag{1}$$
où Ch est l'erreur de consistance.
3. Supposons que $L = 5$ (par exemple si on applique la méthode d'Euler explicite pour résoudre $y' = 5y$) et que $T = 2$. Supposons qu'on choisisse un pas h d'ordre 10^{-3}. Quelle est la valeur de $e^{LT}h$? Que penser de l'estimation d'erreur (1) ?

Exercice 2 (Sensibilité aux données)

On considère l'équation différentielle
$$x'(t) = 3x(t) - 3t. \tag{2}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ Quelle est la solution de (2) satisfaisant la condition initiale $x(0) = 1/3$, respectivement $x(0) = 1/3 + \varepsilon$?
2. Calculer $e^{15}\varepsilon$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Qu'en déduisez vous sur la possibilité de caculer la solution x de (2) satisfaisant $x(0) = 1/3$ au temps $T = 5$ avec un ordinateur ayant une précision de 10^{-3} (respectivement de 10^{-10}) ?

Exercice 3 (Méthode d'Euler et dynamique de l'équation)

Le but de l'exercice est de montrer que la méthode d'Euler peut parfois très mal approcher une équation différentielle, et en particulier modifier considérablement sa dynamique (par dynamique d'une équation différentielle, on entend le comportement de ses trajectoires, vis-à-vis des points attractifs ou répulsifs en particulier).
Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle
$$x' = -x^3 + \lambda x\,. \tag{3}$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et (x, I) la solution maximale de (3) satisfaisant $x(0) = x_0$ (une telle solution existe et est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). Montrer que, pour tout $t \in I$,
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2 \leq -\lambda x^2 + \lambda^2.$$
En déduire la majoration
$$x^2(t) \leq e^{-2\lambda t}x_0^2 + \lambda$$
puis le fait que les solutions sont globales.
2. Représenter les trajectoires de (3). Quels sont les points attractifs ou répulsifs ?
3. On approche (3) par la méthode d'Euler explicite à pas constant $h > 0$. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie vérifie la récurrence
$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{4}$$
avec $f(x) = x((1 + \lambda h) - hx^2)$
4. On étudie la dynamique de l'équation (4) : calculer les points fixes de f et la valeur de f' en chacun de ces points fixes. Que se passe-t-il si $\lambda h > 1$?

Exercice 4 (Influence des erreurs d'arrondi)

Le but de l'exercice est de comprendre l'influence des erreurs d'arrondi qui, inévitablement, se produisent lorsqu'on utilise un ordinateur pour calculer la solution d'une équation différentielle.

Soit donc l'équation différentielle
$$x' = f(t, x), \quad x(0) = X_0. \tag{5}$$
On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable :
$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$
On sait alors que pour tout X_0 dans $\mathbb{R}$ le problème (5) admet une unique solution globale x.
Soit maintenant $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ (N "grand"). Supposons qu'on utilise une méthode d'approximation à un pas (à pas constant h) :
$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n; h), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = X_0, \tag{6}$$
avec $h = T/N$ et $t_n = hn$. On sait que la méthode est stable (pourquoi ?), on la suppose consistante d'ordre 1.
Lorsqu'on utilise cette méthode en pratique, on calcule sur un ordinateur qui a une certaine précision η. Bien que ce soit la formule (6) qui soit programée, le calcul réellement effectué est le suivant :
$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n; h) + \eta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = X_0.$$
Le nombre η_n est l'erreur de calcul fait à la n-ième étape. On suppose $|\eta_n| \leq \eta$.

1. Soit ε_n l'erreur de consistance du schéma et e_n l'erreur
$$e_n = x(t_n) - x_n.$$
Montrer que $e_{n+1} \le (1 + hL)|e_n| + |\varepsilon_n| + \eta$.
2. En déduire, $|e_n| \le e^{LT}(\sum_{k=0}^{n-1} |\varepsilon_k| + n\eta)$ puis $|e_N| \le Ah + B\dfrac{\eta}{h}$ où A et B sont des constantes.
3. Tracer le graphe de la fonction $h \mapsto Ah + B\dfrac{\eta}{h}$ et en déduire le choix du pas h qui donne la meilleure estimation de l'erreur e_n
4. On voit que, loin de gagner en précision, on risque au contraire de faire un calcul erroné si on prend h trop petit par rapport à $\sqrt{\eta}$. Illustrer dans les cas $f(t, x) = 1$, $X_0 = 0$, $h = \eta$ ou $h = \eta^2$.

Exercice 5 (Variation sur Runge-Kutta)

Soit le problème :
$$\begin{cases} y' &= f(x, y), \quad x \in [0, T] \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{7}$$
où $y_0 \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^4([0, T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ est L-(globalement) Lipschitz par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer la solution de (7) on utilise le schéma numérique suivant :
$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \\ y_0 &= y_0 \end{cases}, \quad n = 0, \cdots, N$$
où
$$\Phi(x, y, h) = ak_1 + bk_3$$
avec
$$k_1 = f(x, y),$$
$$k_2 = f(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1)$$
$$k_3 = f(x + 2\frac{h}{3}, y + 2\frac{h}{3}k_2),$$
et où a et b sont deux constantes à déterminer.

1. Établir une relation entre a et b qui assure la consistance du schéma
2. Le schéma est-il stable pour toute valeurs a et $b \in \mathbb{R}$?
3. Déterminer a et b de sorte que le schéma ait l'ordre 2.
4. Montrer que le schéma a alors l'ordre 3.
5. Montrer, toujours sous cette même condition sur a et b que le schéma converge.