Limites de suites.

Exercice 37. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que 1 et $+\infty$ ne peuvent être tous deux une limite de u.

Exercice 38. : Montrer la convergence des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. $v = (5 + (4/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. $w = 2u$.
4. $z : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n > 0$,
$$z_n \ := \ 3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot i\,.$$

Exercice 39. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite $|u|$ est majorée par 3. On suppose, de plus, que u converge vers -2 et que v converge vers $3/2$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que
$$u_n \cdot v_n + 3 \ = \ u_n \cdot (v_n - (3/2)) + (3/2) \cdot (u_n + 2)\,.$$
2. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

Exercice 40. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que les propositions suivantes sont équivalentes.
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(1) &:= \big(\forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,,\\
\mathcal{P}(2) &:= \big(\forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, N \in [\![2023; +\infty[\![\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,,\\
\mathcal{P}(3) &:= \big(\forall\, \epsilon \in]0; 1]\,, \exists\, N \in [\![2023; +\infty[\![\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,,\\
\mathcal{P}(4) &:= \big(\forall\, \epsilon \in]0; 1]\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,.
\end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est aussi équivalente à

$$\mathcal{Q} \ := \ \big(\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big)\,.$$

3. Soit

$$\mathcal{R} \ := \ \big(\forall \epsilon \geq 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big)\,.$$

Donner un exemple de suite réelle u et de réel ℓ pour lesquels l'implication

$$\mathcal{P}(1) \implies \mathcal{R}$$

est fausse.
En particulier, $\mathcal{R}$ n'est pas toujours équivalente à $\mathcal{P}(1)$. Cependant, on peut vérifier que la proposition $(\mathcal{R} \implies \mathcal{P}(1))$ est toujours vraie.

Exercice 41. : Montrer l'existence de la limite des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $v = (5 + 4n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $w = (1 - n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 42. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite u converge vers 3. On suppose que v diverge vers $+\infty$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_2$, $v_n > 0$.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

Exercice 43. : Soit $u : [\![2; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle convergeant vers -3. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $-4 < u_n < -2$.
En particulier, u ne s'annule pas à partir du rang N_1 donc $(1/u)$ est définie à partir de ce rang N_1.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_1$, vérifier que
$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{-1}{3} \right| \leq \frac{|u_n + 3|}{6} .$$

3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

Exercice 44. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite complexe dont la partie réelle converge vers 2 et la partie imaginaire converge vers -3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite u converge.

Exercice 45. : Montrer, en utilisant des sous-suites, que les suites

1. $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $(\sin(n\pi/6))_{n\in\mathbb{N}}$
3. et $(\exp(in\pi/5))_{n\in\mathbb{N}}$

n'ont pas de limite.

Exercice 46. : Soit $a = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\lim a$ et $\lim b$ existent et valent $+\infty$.

Exercice 47. : Étudier la limite des suites :

1. $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $a_n = 2n + 1$,
2. $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $b_n = n^3 - n$,
3. $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$u_n = \frac{n^3 - n + 7}{n^4 + 2n^2 + 1} ,$$
4. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$v_n = \frac{n^5 - n^3 + 2n - 3}{n^2 + 1} ,$$
5. $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = n + (-1)^n$.

Exercice 48. : Montrer la convergence des suites

1. $(\sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

2. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$v_n \;=\; \frac{\cos\big(e^n + n^3 - n^7 - 2\big)}{2n+1}$$

3. et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$w_n \;=\; \frac{n + \sin(n)}{n+3} \,.$$

Exercice 49. : On **admet** l'existence et l'unicité de suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que $u_0 = 5$, $v_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; \frac{u_n \,+\, v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \;=\; 2\cdot\left(\frac{1}{u_n} \,+\, \frac{1}{v_n}\right)^{-1} \,.$$

1. Montrer que la proposition $\mathcal{P}(n) = (v_n \le v_{n+1} < u_{n+1} \le u_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} \,-\, v_{n+1}| \;\le\; \frac{|u_n \,-\, v_n|}{2} \,.$$

3. En déduire que u et v sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune.

4. Montrer que $\ell \ge 0$.

5. Déterminer explicitement ℓ. (Indication : on pourra considérer la suite $u \cdot v$.)

Exercice 50. : Déterminer la borne supérieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $A := [0; 3[$;

2. $B := [3; 7[\cap]0; 5]$;

3. $$C \;:=\; \left\{\frac{1}{n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \;;$$

4. $D := \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

5. $$E \;:=\; \left\{3 \,-\, \frac{1}{n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \,.$$

Exercice 51. : On considère la partie

$$A \;=\; \left\{ \left(1 \,+\, \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n \,;\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

de $\mathbb{R}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 52. : Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par, pour $n \geq 1$,

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Soit $t = (t_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ la suite définie par, pour $n \geq 2$,

$$t_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} \,-\, \frac{1}{k} \right) .$$

1. Pour $k \in [\![2;+\infty[\![$, vérifier que

$$\frac{1}{k^2} \;\leq\; \frac{1}{k-1} \,-\, \frac{1}{k}$$

2. Soit $n \geq 2$. Donner une formule explicite de t_n en fonction de n. En déduire que t converge vers 1.

3. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$|s_{n+p} \,-\, s_n| \;\leq\; t_{n+p} \,-\, t_n \,.$$

4. On montre ici que s est une suite de Cauchy.

   a). Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $|t_{n+p} - t_n| < \epsilon$.

   b). En déduire que, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$.

   c). Conclure.

5. En déduire que s converge. Montrer que $\lim s \in]1;2]$.