Hors programme.

Preuve : On peut suivre la preuve des propositions 2.3 et 2.12. □.

On obtient la reformulation suivante de la définition 4.10.

Proposition 4.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (4.1) *est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in W) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.6}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,. \tag{4.7}$$

Preuve : On montre successivement les implications (4.1) $\Longrightarrow$ (4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.6) : On suppose (4.1) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. $W := U \cap \mathcal{D}$ est la trace sur $\mathcal{D}$ du voisinage U de a donc $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in W$, on a $f(x) \in V$ car $f(W) \subset V$. On a montré (4.6).
(4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) : On suppose (4.6) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ tel que $f(W) \subset V$. Donc $W \subset f^{-1}(V)$. Par le 2 de la proposition 4.18, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. On a montré (4.7).
(4.7) $\Longrightarrow$ (4.1) : on suppose (4.7) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Donc il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f^{-1}(V) = U \cap \mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D} = f^{-1}(V)$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On remarque une similitude entre cette proposition 4.19 et la proposition 3.35 sur les limites de suite.

4.2.2 Limite en un point.

Dans ce paragraphe, on considère le cas où l'on regarde une limite en un point $a \in \mathbb{R}$. On va introduire des notions de limite à droite, de limite à gauche, et de limite épointée, en a. On donne aussi des formulations concrètes de la définition de ces limites.

Dans le paragraphe 4.2.1, on a vu que la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'avait pas de limite en 0. Cependant, cette fonction est constante égale à 1 sur $]0; +\infty[$. On a envie de dire qu'elle tend vers 1 quand x tend vers 0 en restant strictement positif. À cet effet, on va introduire une notion de limite à droite en 0. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 4.20. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. On pose*

$$\mathcal{D}_{\neq a} \;:=\; (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}\;, \quad \mathcal{D}_a^+ \;:=\;]a; +\infty[\cap \mathcal{D} \quad \textit{et} \quad \mathcal{D}_a^- \;:=\;]-\infty; a[\cap \mathcal{D}\,.$$

1. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. On dit que f admet une limite épointée en a si la restriction $f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$ de f à $\mathcal{D}_{\neq a}$ admet une limite en a. Dans ce cas, on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) \;:=\; \lim_{\neq a} f \;:=\; \lim_a f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}\,.$$

2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^+}$ de f à $\mathcal{D}_a^+$ admet une limite en a. Dans ce cas, on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \;:=\; \lim_{x \to a^+} f(x) \;:=\; \lim_{a^+} f \;:=\; \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^+}\,.$$

3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. On dit que f admet une limite à gauche en a si la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^-}$ de f à $\mathcal{D}_a^-$ admet une limite en a. Dans ce cas, on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \;:=\; \lim_{x \to a^-} f(x) \;:=\; \lim_{a^-} f \;:=\; \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^-}\,.$$

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. On dit que f est continue à droite en a si la limite à droite de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*
$$f(a) \;=\; \lim_{a^+} f\,.$$
5. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. On dit que f est continue à gauche en a si la limite à gauche de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*
$$f(a) \;=\; \lim_{a^-} f\,.$$

Quelques commentaires s'imposent. Prenons $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et un réel a adhérent à $\mathcal{D}$. Tout d'abord, la limite en a d'une restriction de f est définie par la définition (4.10) avec f remplacée par cette restriction et $\mathcal{D}$ remplacé par le domaine de définition de la restriction.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;3[$.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-\infty;0]$.
On a déjà expliqué au paragraphe 4.2.1 pourquoi on ne considère que la limite en un endroit a qui est adhérent au domaine de définition de la fonction considérée. Ceci explique l'hypothèse d'adhérence dans tous les points de la définition 4.20.
On note que si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ (resp. $\mathcal{D}_a^-$), il est automatiquement adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ puisque $\mathcal{D}_a^+ \subset \mathcal{D}_{\neq a}$ (resp. $\mathcal{D}_a^- \subset \mathcal{D}_{\neq a}$). On note aussi que, si a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$, il est adhérent à $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}_{\neq a} \subset \mathcal{D}$.
Bien sûr, si $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}$, la limite épointée de f en a est la limite tout court de f en a, si cette dernière existe. C'est le cas pour la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $1/x^2$ et $a = 0$. On verra plus loin $\lim_0 g$ est $+\infty$.
On a un phénomène similaire pour la limite à droite si $\mathcal{D}_a^+ = \mathcal{D}$ ou pour la limite à gauche si $\mathcal{D}_a^- = \mathcal{D}$. Ces notions de limites sont donc intéressantes dans les autres cas.
Revenons à l'exemple, considéré plus haut, de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait que sa limite n'existe pas mais la fonction $f_{|]0;+\infty[}$, qui est constante égale à 1, a 1 pour limite en 0 (comme on le vérifiera plus loin). Il en est de même de $f_{|]-\infty;0[}$ qui tend elle vers -1 en 0. Comme $f(0) = 0 \notin \{-1;1\}$, f n'est ni continue à droite en 0 ni continue à gauche en 0. Il se trouve que la limite épointée de f en 0 n'existe pas (voir (4.8) ci-dessous).

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.*

1. *Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$ telle que a soit adhérent à $\mathcal{D}'$. Si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a (f_{|\mathcal{D}'})$ existe aussi et vaut $\lim_a f$.*
2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et à $\mathcal{D}_a^-$ (il est donc adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$). On a l'équivalence suivante :*
$$\left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{a^+} f \text{ et } \lim_{a^-} f \text{ existent et coïncident}\right). \tag{4.8}$$
Lorsqu'une des propositions est vraie, on a $\lim_{\neq a} f = \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f$.
3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \notin \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right). \tag{4.9}$$
Lorsqu'une des propositions est vraie, on a $\lim_a f = \lim_{\neq a} f$.
4. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \in \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe et vaut } f(a)\right). \tag{4.10}$$
Lorsqu'une des propositions est vraie, on a $\lim_a f = \lim_{\neq a} f = f(a)$.

Preuve : On remarque tout d'abord que l'on a $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}_a^- \cup \mathcal{D}_a^+$, que, si $a \notin \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$, et que, si $a \in \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a} \cup \{a\}$. On pose $f_a = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$, $f^+ = f_{|\mathcal{D}_a^+}$ et $f^- = f_{|\mathcal{D}_a^-}$.

1. Soit $\ell = \lim_a f$. On montre que $\lim_a (f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}'}$.
   Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a, comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f_{|\mathcal{D}'}(x) = f(x) \in V$. On a montré que $\lim_a (f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$.
2. On montre les deux implications de (4.8) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a f_a$ existe. On doit vérifier que $\lim_a f^+ = \ell = \lim_a f^-$.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^-$. On obtient $\lim_a f^-$ existe et vaut ℓ.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^+$. On obtient $\lim_a f^+$ existe et vaut ℓ.
   On a montré que $\lim_a f^-$ et $\lim_a f^+$ existent et valent ℓ.
   $\Longleftarrow$) : On suppose maintenant que $\lim_a f^+$ et $\lim_a f^-$ existent et sont égales. On appelle ℓ la valeur commune. On montre que $\lim_a f_a$ existe et vaut ℓ, en utilisant (4.1) avec f remplacée par f_a.
   Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U^+ de a tel que $f^+(U^+ \cap \mathcal{D}_a^+) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^+). Par hypothèse, il existe aussi un voisinage U^- de a tel que $f^-(U^- \cap \mathcal{D}_a^-) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^+). Soit $U = U^+ \cap U^-$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$ avec $x \in U$. On a $x \neq a$. Si $x > a$, $x \in \mathcal{D}_a^+$ et, comme $U \subset U^+$, $x \in U^+$. Comme $x \in (U^+ \cap \mathcal{D}_a^+)$, $f(x) \in V$. Si $x < a$, $x \in \mathcal{D}_a^-$ et, comme $U \subset U^-$, $x \in U^-$. Comme $x \in (U^- \cap \mathcal{D}_a^-)$, $f(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f_a = \ell$.
3. On suppose $a \notin \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$ et $f = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$. On a donc (4.9) et égalité des limites en cas d'existence.
4. On prend $a \in \mathcal{D}$. On montre les deux implications de (4.10) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f$ existe. On sait qu'elle vaut $f(a)$ (cf. proposition 4.13). On doit vérifier que $\lim_a f_a = \lim_{\neq a} f$ existe et vaut $f(a)$.
   On applique le 1 avec $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$. On obtient $\lim_{\neq a} f$ existe et vaut $f(a)$.
   $\Longleftarrow$) : On suppose que $\lim_a f_a$ existe et vaut $f(a)$. On doit vérifier que $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$. On utilise (4.1) avec ℓ remplacée par $f(a)$.
   Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f_a(U \cap \mathcal{D}_{\neq a}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$. Si $x = a$ alors $f(x) = f(a) \in V$, car V est un voisinage de $f(a)$ (cf. remarque 3.31). Si $x \neq a$, $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$. Comme $x \in U$, $x \in U \cap \mathcal{D}_{\neq a}$ donc $f(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f = f(a)$. $\square$

Maintenant, on va voir des reformulations équivalentes et plus maniables de la définition 4.10 lorsque $a \in \mathbb{R}$ mais en distinguant les cas où la limite est finie de ceux où la limite est infinie.

On commence par des reformulations équivalentes dans le cas d'une limite finie en un point. On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 4.22. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.11}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.12}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.13}$$

C'est surtout la proposition (4.12) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.22 : On montre successivement les implications (4.1) $\Longrightarrow$ (4.11) $\Longrightarrow$ (4.12) $\Longrightarrow$ (4.13) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.11) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.11).
(4.11) $\Longrightarrow$ (4.12) : On suppose (4.11) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages réels de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| < \delta$, on a $x \in I(a; \delta[$, donc $x \in U$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.12).
(4.12) $\Longrightarrow$ (4.13) : On suppose (4.12) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. Comme $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $f(x) \in D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donc $f(x) \in V$. On a montré (4.13).
(4.13) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.13) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

Voyons quelques exemples de limites finies en un point. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $c \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$. On s'attend à ce qu'elle tende vers c en a. Vérifions-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = 2022$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a f = c$.
En particulier, f est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Voyons un autre exemple. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in \mathcal{D}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. On devine que la limite de Id en a est a. Montrons-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par a.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|\mathrm{Id}(x) - a| = |x - a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|\mathrm{Id}(x) - a| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a \mathrm{Id} = a$.
En particulier, la fonction Id est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Dans la preuve précédente, on aurait pu aussi prendre $\delta = (\epsilon/2)$, ou $\delta = (\epsilon/3)$ ou même n'importe quel nombre dans $]0; \epsilon]$.
Un exemple similaire est le suivant. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $t_b(x) = x - b$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on devine que t_b tend vers $a - b$ en a. Montrons-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par $a - b$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|t_b(x) - (a - b)| = |x - b - (a - b)| = |x - a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|t_b(x) - (a - b)| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a t_b = a - b$. En particulier, la fonction t_b est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 4.14).
Revenons à l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait qu'elle n'a pas de limite en 0 (cf. paragraphe 4.2.1). On a affirmé plus haut qu'elle admet des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes. Vérifions ce point. Plus précisément, montrons que $\lim_{0^+} f = 1$ et $\lim_{0^-} f = -1$.
Comme $f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ est constante égale à 1 et comme $f_{|\mathbb{R}^{-*}}$ est constante égale à -1, on a le résultat cherché d'après le cas constant traité plus haut. En utilisant (4.8), on retrouve que $\lim_{\neq 0} f$ n'existe pas. Par (4.10), on retrouve aussi que $\lim_0 f$ n'existe pas.
Toujours pour cette fonction f, que se passe-t-il en un point $a \neq 0$? Si $a > 0$ alors f coïncide avec la fonction constante égale à 1 sur le voisinage $]a/2; +\infty[$ de a. De plus, cette fonction constante à une limite en a. Donc, par la proposition 4.16, $\lim_a f$ existe et vaut $\lim_{x \to a} 1 = 1$. Si maintenant $a < 0$, on obtient par le même raisonnement que $\lim_a f$ existe et vaut $\lim_{x \to a} (-1) = -1$. La fonction f est donc continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.

À lire.

Donnons un exemple de fonction complexe. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f x) \; = \; \frac{2 + 3ix}{1+x^2}\,.$$

On devine que $\lim_0 f$ existe et vaut 2. On le montre en utilisant (4.12).
Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) \,-\, 2| \;=\; \left|\frac{2 + 3ix \,-\, 2(1+x^2)}{1+x^2}\right| \;=\; \frac{|3ix \,-\, 2x^2|}{1+x^2} \;\leq\; |3ix \,-\, 2x^2|$$

car $1+x^2 \geq 1$. De plus, $|3ix \,-\, 2x^2| = |x| \cdot |3i - 2x| \leq |x|(3 + 2|x|)$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $5\delta \leq \epsilon$ et $\delta \leq 1$. C'est possible puisque l'on peut prendre $\delta = \min(1; (\epsilon/5))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \delta$, on a, d'après le calcul précédent, $|f(x) - 2| \leq |x|(3+2|x|) < \delta(3+2\delta) \leq \delta \cdot 5 \leq \epsilon$. On a montré que $\lim_0 f = 2$.
Comme 0 est dans le domaine de définition de f et que la limite de f en zéro existe, f est continue en 0.

On reformule maintenant la définition des limites infinies en un point. On se place donc dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.23. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $a \in \mathbb{R}$, qui est un point adhérent à $\mathcal{D}$.*
Pour $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \,\in\, U) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,>\, L)\big)\,, \tag{4.14}$$

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x \,-\, a| \,<\, \delta) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,>\, L)\big)\,, \tag{4.15}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x \,-\, a| \,<\, \delta) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,\in\, V)\big)\,. \tag{4.16}$$

Pour $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \,\in\, U) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,<\, -L)\big)\,, \tag{4.17}$$

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x \,-\, a| \,<\, \delta) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,<\, -L)\big)\,, \tag{4.18}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x \,-\, a| \,<\, \delta) \;\Longrightarrow\; (f(x) \,\in\, V)\big)\,. \tag{4.19}$$

C'est surtout les propositions (4.15) et (4.18) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

À lire.

Preuve de la proposition 4.23 : On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.14) $\Longrightarrow$ (4.15) $\Longrightarrow$ (4.16) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.14) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = +\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.14).
(4.14) $\Longrightarrow$ (4.15) : On suppose (4.14) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, $x \in I(a; \delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.15).
(4.15) $\Longrightarrow$ (4.16) : On suppose (4.15) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]L; +\infty[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) > L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. On a $f(x) > L$ donc $f(x) \in]L; +\infty[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.16).
(4.16) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.16) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

Étudions deux exemples. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe $f(x) = 1/x$. On remarque que 0 est bien adhérent à $\mathbb{R}^{+*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut $+\infty$, en utilisant (4.15).

Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $|x| < \delta$, on a $0 < x < 1/L$ donc $f(x) = 1/x > L$. On a montré (4.15).
Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \neq 0$ associe $h(x) = 1/x$. On devine que h n'a pas de limite en 0 car ses limites à droite et à gauche existent mais sont différentes. Montrons cela.
La restriction de h à $\mathbb{R}^*\cap]0; +\infty[$ est f et $\lim\limits_{0} f = +\infty$. Donc $\lim\limits_{0^+} h$ existe et vaut $+\infty$.
Appelons g la restriction de h à $\mathbb{R}^*\cap] - \infty; 0[= \mathbb{R}^{-*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut $-\infty$, en utilisant (4.18) avec f remplacée par g.
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$ avec $|x| < \delta$, on a $-1/L < x < 0$ donc $1/(-Lx) > 1$ et donc $g(x) = 1/x < -L$. On a montré (4.18).
Ainsi $\lim\limits_{0^-} h$ existe et vaut $-\infty \neq +\infty$. Donc h n'a pas de limite en 0 par (4.8) (avec f remplacée par h).

4.2.3 Prolongement par continuité.

On reste dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 4.24. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathcal{D})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe dans $\mathbb{K}$. L'application $\hat{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \in \mathcal{D}$, et $\hat{f}(a) = \ell$, est appelé prolongement par continuité de f en a.*

Remarquons que, dans le cadre de cette définition 4.24, le prolongement $\hat{f}$ de f en a est automatiquement continue en a. En effet, la limite $\lim\limits_{\neq a} \hat{f}$ existe et vaut $\lim\limits_{a} f$, puisque $(\hat{f})_{|\mathcal{D}_{\neq a}} = f$. De plus, comme $\hat{f}(a) = \ell = \lim\limits_{\neq a} \hat{f}$, la limite de $\hat{f}$ en a existe, par (4.10) avec f remplacée par $\hat{f}$. D'après la définition 4.14, $\hat{f}$ est continue en a.
Voyons des exemples et un contre-exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/|x|$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? On étudie sa limite en 0. On remarque que la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ est constante égale à 1 donc elle tend vers 1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^+} f$ existe et vaut 1. Comme la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$ est constante égale à -1 donc elle tend vers -1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^-} f$ existe et vaut -1. Comme $\lim\limits_{0^+} f \neq \lim\limits_{0^-} f$, f n'a pas de limite en 0. Elle ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0.
En revanche, on peut prolonger par continuité en 0 la restriction f^+ de f à $\mathbb{R}^{+*}$. La limite de f^+ en 0 est en fait la limite à droite de f en 0, qui est $1 \in \mathbb{R}$. Donc f^+ admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction $\widehat{f^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^+}(x) = 1$.
On peut aussi prolonger par continuité en 0 la restriction f^- de f à $\mathbb{R}^{-*}$, puisque f^- a pour limite $-1 \in \mathbb{R}$ en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction $\widehat{f^-} : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^-}(x) = -1$.
Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $g(x) = x^2/x$. Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} x = 0$, par le 3 de la proposition 4.21, donc $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut 0. Le prolongement par continuité de g en 0 est donc l'application $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{g}(x) = g(x) = x^2/x = x$, si $x \neq 0$, et $\hat{g}(0) = 0$. Donc $\hat{g} = \mathrm{Id}$.

4.2.4 Limite à l'infini.

On reprend ici la démarche suivie dans le paragraphe 4.2.2 précédent mais pour $a \in \{-\infty; +\infty\}$. Comme il n'y a pas lieu d'introduire des limites à gauche ou à droite dans ce cas, on se concentre sur des reformulations concrètes des limites.

On commence par les limites finies. On a donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.25. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.*
Pour $a = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.20}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.21}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.22}$$

Pour $a = -\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.23}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.24}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.25}$$

C'est surtout les propositions (4.21) et (4.24) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite. Donnons un exemple. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On devine que sa limite en $+\infty$ existe et vaut 0. Vérifions-le avec (4.21).
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $A = 1/\epsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x > A$, on a $f(x) = 1/x < 1/A = \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x) = 0$.

À lire.

Preuve de la proposition 4.25 : On traite seulement le cas où $a = +\infty$. L'autre cas est similaire.
On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.20) $\Longrightarrow$ (4.21) $\Longrightarrow$ (4.22) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.20) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.20).
(4.20) $\Longrightarrow$ (4.21) : On suppose (4.20) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.21).
(4.21) $\Longrightarrow$ (4.22) : On suppose (4.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.22).
(4.22) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.22) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

On traite les limites infinies. On prend donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.26. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$.*
Pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.26}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.27}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.28}$$

Pour $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.29}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.30}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.31}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.32}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.33}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.34}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.35}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.36}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.37}$$

C'est surtout les propositions (4.27), (4.30), (4.33) et (4.36) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

À lire.

Preuve de la proposition 4.26 : On traite seulement le cas où $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$. Les autres cas sont similaires.
On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.29) $\Longrightarrow$ (4.30) $\Longrightarrow$ (4.31) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.29) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $f(x) < -L$. On a montré (4.29).
(4.29) $\Longrightarrow$ (4.30) : On suppose (4.29) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $f(x) < -L$. On a montré (4.30).
(4.30) $\Longrightarrow$ (4.31) : On suppose (4.30) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]-\infty; -L[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) < -L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) < -L$ soit $f(x) \in]-\infty; -L[\subset V$. On a montré (4.31).
(4.31) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.31) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

On traite quelques exemples. On reprend la fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. $-\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}$. On devine que la limite $\lim_{-\infty} \mathrm{Id}$ existe et vaut $-\infty$. On le montre en utilisant (4.36).
Soit $L > 0$. On choisit $A = L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x < -A$, on a $x < -L$. On a montré (4.36) et donc que $\lim_{-\infty} \mathrm{Id} = -\infty$.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2$. On devine qu'elle a $-\infty$ pour limite en $+\infty$. On le montre en utilisant (4.30).
Soit $L > 0$. On choisit $A = \sqrt{L} > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$, on a $x^2 > A^2$ donc $g(x) = -x^2 < -A^2 = -L$. On a montré (4.30).

4.3 Opérations sur les limites de fonctions.

Comme pour les limites de suites, on va voir que des opérations de base sur les fonctions se transmettent aux limites de fonctions. On commence par des propriétés générales puis on considère séparément les cas de limites finies et de limites infinies.