4.3.1 Composition.

On se place dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, on peut la composer à droite par une fonction réelle $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$. Que peut-on dire des limites de $f \circ g$ à partir de celles de f et g ?

Proposition 4.27. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}'$ et tel que $\ell' := \lim_a g$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Alors ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$ et on suppose que $\ell := \lim_{\ell'} f$ existe. Alors $\lim_a (f \circ g)$ existe et vaut ℓ, i.e.*

$$\lim_a (f \circ g) \; = \; \lim_{(\lim_a g)} f \, .$$

Preuve : Vérifions d'abord que ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $W \in \mathcal{V}_{\ell'}$. Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel que $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$. Soit $x \in U \cap \mathcal{D}'$ (qui est non vide car a est adhérent à $\mathcal{D}'$). On a donc $g(x) \in W$ et aussi $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $(W \cap \mathcal{D}) \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout voisinage W de ℓ', ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$.
On montre que la limite en a de $f \circ g$ existe et vaut ℓ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f \circ g$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Comme ℓ est la limite de f en ℓ', il existe un voisinage W de ℓ' tel que $f(W \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1) avec a remplacé par ℓ'). Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$ (cf. (4.1) avec f remplacée par g et ℓ remplacée par ℓ'). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}'$ donc $g(x) \in W$. Comme g est à valeurs dans $\mathcal{D}$, $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $g(x) \in W \cap \mathcal{D}$. D'où $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in V$. On a montré que $\lim_a (f \circ g) = \ell$. □

On a vu dans le paragraphe 4.2.2 que les translations t_b (pour $b \in \mathbb{R}$) sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant pour les limites en un point de $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.28. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$*
On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell = \lim_a f$ existe. Alors 0 est un point adhérent au domaine de définition de $f \circ t_{-a}$ et ℓ est aussi la limite en 0 de cette fonction $f \circ t_{-a}$, i.e.

$$\lim_{x \to a} f(x) \; = \; \lim_a f \; = \; \lim_0 (f \circ t_{-a}) \; = \; \lim_{h \to 0} f(a+h) \, .$$

Réciproquement, si 0 est un point adhérent au domaine de définition de $f \circ t_{-a}$ et si la limite en 0 de $f \circ t_{-a}$ existe alors a est un point adhérent à $\mathcal{D}$, la limite en a de f existe et les deux limites sont égales.

Lire.

Preuve : On remarque tout d'abord que la restriction de t_a à $\mathcal{D}$ est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_a := t_a(\mathcal{D})$. De plus, sa bijection réciproque est la restriction à $\mathcal{D}_a$ de t_{-a}. On note que $f \circ t_{-a}$ est définie sur $\mathcal{D}_a$.

a). On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell := \lim_a f$ existe. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et 0 est un point adhérent à $t_a(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_a$, d'après la proposition 4.27. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.27 avec g remplacée par la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, a remplacé par 0 et ℓ' remplacée par a, la limite en 0 de $f \circ t_{-a}$ existe et vaut ℓ.

b). On suppose 0 est un point adhérent à $\mathcal{D}_a$ et que $\ell := \lim_0 (f \circ t_{-a})$ existe. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et a est adhérent à $t_{-a}(\mathcal{D}_a) = \mathcal{D}$, d'après la proposition 4.27. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.27 avec f remplacée par $f \circ t_{-a}$, g remplacée par t_a, et ℓ' remplacée par 0, la limite en a de $(f \circ t_{-a}) \circ t_a$ existe et vaut ℓ. Comme $(f \circ t_{-a}) \circ t_a = f \circ (t_{-a} \circ t_a) = f$, on en déduit que la limite en a de f existe et vaut ℓ. □

Concernant la continuité, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.29. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que g est continue sur une partie $\mathcal{D}'_0$ de $\mathcal{D}'$, que f est continue sur une partie $\mathcal{D}_0$ de $\mathcal{D}$ et que $g(\mathcal{D}'_0) \subset \mathcal{D}_0$. Alors $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{D}'_0$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'_0$. Par l'hypothèse sur g, g est continue en a. Comme $g(\mathcal{D}'_0) \subset \mathcal{D}_0$ et $a \in \mathcal{D}'_0$, $g(a) \in \mathcal{D}_0$. De plus $\lim_a g = g(a) \in \mathbb{R}$ (cf. proposition 4.13). Par l'hypothèse sur f, f est continue en $g(a)$. Donc $\lim_{g(a)} f$ existe. Par la proposition 4.27, $\lim_a (f \circ g)$ existe donc $f \circ g$ est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}'_0$, $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{D}'_0$. $\square$

4.3.2 Propriétés générales des limites de fonction.

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Remarque 4.30. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. D'après les propositions 4.22 et 4.25, ($\lim_a f = \ell$) est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0 , \quad \exists U \in \mathcal{V}_a ; \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon) \big) . \tag{4.38}$$

Proposition 4.31. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $(\lambda; \ell; \ell') \in \mathbb{K}^3$.*

1. *Théorème des gendarmes. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en a et un voisinage U de a tels que*

$$\forall x \in \mathcal{D} , \quad \big((x \in U) \implies \big(|f(x) - \ell| \leq h(x) \big) . \tag{4.39}$$

   Alors $\lim_a f$ existe et vaut ℓ.

2. *Propriétés du module (ou de la valeur absolue).*

$$\big(\lim_a f = \ell \big) \iff \big(\lim_a |f - \ell| = 0 \big) . \tag{4.40}$$

   En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\big(\lim_a f = 0 \big) \iff \big(\lim_a |f| = 0 \big) . \tag{4.41}$$

   De plus, on a

$$\big(\lim_a f = \ell \big) \implies \big(\lim_a |f| = |\ell| \big) . \tag{4.42}$$

3. *On suppose que $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim_a (f + g) = \ell + \ell' , \quad \lim_a (\lambda f) = \lambda \cdot \ell , \quad \lim_a (fg) = \ell \cdot \ell' .$$

   Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$ et on a

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell} .$$

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que f et g sont continues en a. Alors $f + g$, λf et fg sont continues en a. Si, de plus, $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$, et $1/f$ est continue en a.*

5. *On suppose que f et g sont continues sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. Alors $f+g$, λf et fg sont continues sur $\mathcal{D}'$. Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, alors $1/f$ est définie et continue sur $\mathcal{D}'$.*

Preuve : On adapte les preuves des propositions 3.40 et 3.41.

1. Sous les hypothèses de l'énoncé, on montre que f tend vers ℓ en a en utilisant (4.38).
Soit $\epsilon > 0$. Comme h tend vers 0 en a, il existe, par (4.38) avec f remplacée par h et ℓ remplacée par 0, un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $|h(x)| < \epsilon$. Soit $U_1 = U \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. propositions 2.6 et 2.12). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on a $x \in U$ donc, par (4.39), $|f(x) - \ell| \leq h(x)$ et, comme $x \in U_0$, $h(x) \leq |h(x)| < \epsilon$. Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que f tend vers ℓ en a.
2. On remarque que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
$$\big||f - \ell|(x) - 0\big| = \big||f(x) - \ell| - 0\big| = |f(x) - \ell| .$$
Donc (4.38) est identique à (4.38) pour f remplacée $|f - \ell|$ et ℓ remplacée par 0. En utilisant la remarque 4.30 pour f et $|f - \ell|$, on obtient l'équivalence (4.40).
Montrons (4.42). On suppose que $\lim_a f = \ell$. D'après ce que l'on vient de démontrer, la fonction $|f - \ell|$ tend vers 0 en a. De plus, pour $x \in \mathcal{D}$, on a, par (2.3),
$$\big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell|$$
donc, par le théorème des gendarmes appliqué à $|f|$ (cf. 1), $\lim_a |f| = |\ell|$. On a montré (4.42).
3. a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $f + g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.38) avec f remplacée par $f + g$ et ℓ remplacée par $\ell + \ell'$.
On remarque tout d'abord que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
$$\big|(f + g)(x) - (\ell + \ell')\big| = \big|(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')\big| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| , \quad (4.43)$$
d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.2) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.6) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.43), $|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| < 2(\epsilon/2) = \epsilon$. On a montré que $f + g$ tend vers $\ell + \ell'$ en a.
b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $f \cdot g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.38) avec f remplacée par fg et ℓ remplacée par $\ell\ell'$.
On écrit tout d'abord, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
$$(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell') = f(x) \cdot (g(x) - \ell') + (f(x) - \ell) \cdot \ell' .$$
Donc, par l'inégalité triangulaire,
$$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| \leq |f(x)| \cdot \big|g(x) - \ell'\big| + |f(x) - \ell| \cdot |\ell'| . \quad (4.44)$$
Soit $\epsilon > 0$. Soit
$$\epsilon' \in \left]0\,; \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right] .$$
Lire.
Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon'$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.44) et le choix de ϵ',
$$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| < \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \leq \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \leq \epsilon .$$
On a montré que fg tend vers $\ell\ell'$ en a.

c). En remplaçant la fonction v par la fonction constante égale à λ, qui tend en a vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim_a(\lambda f) = \lambda\ell$.

Lire.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $f(x) \in A$ (cf. (4.1)). Comme B contient 0 (cf. remarque 3.31) et $A \cap B = \emptyset$, $f(x) \neq 0$. Donc la fonction $1/f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_0 := U_0 \cap \mathcal{D}$. De plus, a est adhérent à $\mathcal{D}_0$ (cf. remarque 4.9). Montrons maintenant que $1/\ell$ est la limite en a de $1/f$ en utilisant la proposition (4.38) avec f remplacée par $1/f$ et ℓ remplacée par $1/\ell$.
Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathcal{D}_0$, on a $f(x) \notin B$, donc $f(x) \notin D(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $f(x) \notin I(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|f(x)| \geq \delta_0$. De plus, pour $x \in \mathcal{D}_0$,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - f(x)}{f(x)\cdot\ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - f(x)|}{|f(x)|\cdot|\ell|} \leq \frac{|f(x) - \ell|}{\delta_0\cdot|\ell|}. \tag{4.45}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0;\ \delta_0\cdot|\ell|\cdot\epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0\cdot|\ell|\cdot\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}_0$ avec $x \in U$, on a $x \in U_1$ et, d'après (4.45),

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\epsilon'}{\delta_0\cdot|\ell|} \leq \epsilon.$$

On a montré que $\lim_a(1/f) = 1/\ell$.

4. D'après la définition de la continuité en a (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 3 avec $\ell = f(a)$ et $\ell' = g(a)$.
5. D'après la définition de la continuité sur $\mathcal{D}'$ (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 4. □

On termine ce paragraphe par un résultat commode sur les fonctions complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe dans la définition 4.5.

Proposition 4.32. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim_a f = \ell \iff \left(\left(\lim_a \Re(f) = \Re(\ell)\right) \quad et \quad \left(\lim_a \Im(f) = \Im(\ell)\right)\right).$$

Lire.

Preuve : On adapte la preuve de la proposition 3.42.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f = \ell$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a, d'après (2.4),

$$\left|(\Re(f))(x) - \Re(\ell)\right| = \left|\Re(f(x) - \ell)\right| \leq |f(x) - \ell| \quad \text{et} \quad \left|(\Im(f))(x) - \Im(\ell)\right| = \left|\Im(f(x) - \ell)\right| \leq |f(x) - \ell|.$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 4.31 avec $h = |f - \ell|$, on en déduit que $\lim_a \Re(f)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim_a \Im(f)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'en a, $\Re(f)$ tend vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ tend vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 4.31 (avec f remplacée par $\Im(f)$ et $\lambda = i$), $i\Im(f)$ tend vers $i\Im(\ell)$ en a. Par la proposition 4.31 (avec f remplacée par $\Re(f)$ et g remplacée par $i\Im(g)$), $f = \Re(f) + i\Im(f)$ tend vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$ en a. □

4.3.3 Propriétés propres aux limites de fonctions réelles.

On reprend le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les fonctions réelles, un pendant de la proposition 4.31 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.33. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. D'après les propositions 4.23 et 4.26,* $(\lim_a f = +\infty)$ *est équivalente à*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big) \tag{4.46}$$

et $(\lim_a f = -\infty)$ *est équivalente à*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,. \tag{4.47}$$

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la convention adoptée pour les limites de suites : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 4.34. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim_a f$ et $\ell' = \lim_a g$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors f est strictement supérieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > b$.*
2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors f est strictement inférieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < b$.*
3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée "près de a", i.e. il existe $(m; M) \in \mathbb{R}^2$ et un voisinage U de a tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $m \leq f(x) \leq M$.*
4. *On suppose que f est inférieure à g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq g(x)$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par f et g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par f "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x)$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) \leq g(x)$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de passer à la preuve de cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 4.34 à f (ou à f et g) que si l'on sait déjà que f a une limite (ou que f et g ont une limite) en a.
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) est (sont) infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$) en a, alors f est strictement positive près de a.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$) en a, alors f est strictement négative près de a.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $x \to a$ dans les inégalités $f(x) \leq g(x)$, qui sont vraies près de a. Si l'on suppose que $f(x) < g(x)$ près de a, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 1/x$, et g la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) > 0 = g(x)$ mais, comme on l'a vu au paragraphe 4.2.4, $\lim_{+\infty} f = 0 = \lim_{+\infty} g$. La proposition $(\lim_{+\infty} f > \lim_{+\infty} g)$ est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $x \to a$ dans des inégalités strictes, on récupère une inégalité large.

On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des fonctions est constante. Par exemple, si l'on considère une fonction réelle positive qui a une limite en a alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec f constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les fonctions f et g jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $f = -g$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, les équivalences

$$(f(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (-g(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (|h(x)| \leq g(x))\,. \tag{4.48}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 4.31.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Voyons un exemple d'application d'un de ces théorèmes des gendarmes. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(1+x^2)^{-1}$. On étudie l'existence de la limite en 0. On devine que la fonction est continue en 0 donc que sa limite en 0 existe et vaut $f(0) = 0$. Pour démontrer cela, on peut utiliser des résultats de la proposition 4.31. On va ici utiliser le théorème des gendarmes.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x^2 \geq 1$, donc $0 \leq (1+x^2)^{-1} \leq 1$. D'où $0 \leq f(x) \leq x^2$. On a vu que $\lim_{x \to 0} x = 0$ donc, par le 3 de la proposition 4.31 pour fg avec $f = g = \mathrm{Id}$, on a $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Comme on a aussi $\lim_{x \to 0} 0 = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 4.34), que $\lim_0 f$ existe et vaut 0. On remarque que l'on aurait aussi pu utiliser le 1 de la proposition 4.31.

Preuve de la proposition 4.34 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.43). Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) > b$.

Lire.

2. Soit $V :=]-\infty; b[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.43). Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) < b$.
3. On suppose $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $m = \ell - 1$ et $M = \ell + 1$. L'intervalle $[m; M]$ est un voisinage de ℓ car il contient $I(\ell; 1[$. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in [m; M]$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a bien $m \leq f(x) \leq M$.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. Dans la preuve de la proposition 3.43, on a vu qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=]-\infty; b[$ est un voisinage de ℓ'. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Comme $\ell' = \lim_a g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) \in V'$. Soit $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U_0 \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ car $x \in U_1$, $g(x) \in V'$ car $x \in U_2$, et $f(x) \leq g(x)$, car $x \in U$. Donc, $g(x) < b < f(x)$ et $f(x) \leq g(x)$. Contradiction. Conclusion $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (4.38) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Comme $\ell = \lim_a g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $|g(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $U' = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U' \cap \mathcal{D}$, on a, en utilisant successivement que $x \in U_1$, $x \in U$ et $x \in U_2$, que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ et $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$, donc
   $$\ell - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \epsilon\,,$$
   c'est-à-dire $|h(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que h tend vers ℓ en a.

6. On montre (4.46) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, il existe, par (4.46), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) > L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \geq f(x)$, car $x \in U$, et $f(x) > L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) > L$. On a montré que $\lim_a h$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (4.47) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
Lire.
Soit $L > 0$. Comme $\lim_a g = -\infty$, il existe, par (4.46), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) < -L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \leq g(x)$, car $x \in U$, et $g(x) < -L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) < -L$. On a montré que $\lim_a h$ existe et vaut $-\infty$. □

Maintenant, on revient sur les propriétés du 3 de la proposition 4.31 mais pour des fonctions réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 4.35. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim_a f$ et $\ell' = \lim_a g$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

- *a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a (f + g) = \ell$;*
- *b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim_a (f + g) = \ell$;*
- *c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = -\ell$;*
- *d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = 0$;*
- *e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim_a (fg) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim_a (fg) = -\ell$;*
- *f). La fonction $1/f$ est définie "près de a" et tend vers 0 en a, i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \neq 0$ et $\lim_a (1/f) = 0$.*
- *g). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement positives "près de a", i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) > 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie "près de a", i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim_a (1/h) = +\infty$.*
- *h). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement négatives "près de a", i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) < 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie "près de a", i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim_a (1/h) = -\infty$.*

Comme dans la proposition 3.44, les cas non considérés sont indéterminés.

Preuve de la proposition 4.35 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ de ceux où $\ell = -\infty$.

Lire.

Cas $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par cette même proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.38) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L' + \ell' - 1 \geq L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = +\infty$.

Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L + \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par cette même proposition (4.47), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.38) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2

de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) < -L' + \ell' + 1 \leq -L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = -\infty$.

b). On sépare le cas où $\ell = \ell' = +\infty$ du cas où $\ell = \ell' = -\infty$.

Lire.

Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Comme $\lim_a g = +\infty$, on sait, toujours par la proposition (4.46) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) > 0$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L$, car $x \in U_1$, et $g(x) > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L + 0 = L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = +\infty$.

Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.47), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Comme $\lim_a g = -\infty$, on sait, toujours par la proposition (4.47) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) < 0$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L$, car $x \in U_1$, et $g(x) < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) < -L + 0 = -L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = -\infty$.

c). On distingue quatre cas.

Lire.

<u>Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = +\infty$</u> : On montre que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > \lambda L' = L$. On a montré que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$.

<u>Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = +\infty$</u> : On montre que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = -L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < \lambda L' = -L$. On a montré que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$.

<u>Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = -\infty$</u> : On montre que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < -\lambda L' = -L$.

<u>Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = -\infty$</u> : On montre que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. $L' = L/(-\lambda) > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > -\lambda L' = L$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle tend vers 0 en a.

e). On distingue quatre cas.

Lire.

<u>Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = +\infty$</u> : Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a ((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a (fg) = +\infty$.

<u>Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = +\infty$</u> : Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur

Lire.

$U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = -\infty$.

Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = -\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = -\infty$.

Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = -\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = +\infty$.

f). On distingue deux cas.

Cas où $\ell > 0$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.38).

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, il existe, par la proposition (4.46), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > (1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/f(x)) < \epsilon$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.

Lire.

Cas où $\ell < 0$: Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.38).

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, il existe, par la proposition (4.46), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -(1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -(1/\epsilon) < 0$ donc $-\epsilon < (1/f(x)) < 0$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.

g). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement positive. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46).

Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) > 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < h(x) < (1/L)$. D'où $(1/h(x)) > L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = +\infty$.

Lire.

h). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement négative. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47).

Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) < 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < -h(x) < (1/L)$. Comme $L > 0$, on a $-Lh(x) < 1$ et, comme $h(x) < 0$, $(1/h(x)) < -L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = -\infty$. □

On s'intéresse maintenant aux fonctions monotones. On commence par les limites à l'infini.

Proposition 4.36. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors $\lim_a f$ existe. On pose $\sup f := \sup f(\mathcal{D})$ et $\inf f = \inf f(\mathcal{D})$.*

1. *Si f est croissante et $a = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = \sup f$.*

2. *Si f est décroissante et $a = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = \inf f$.*
3. *Si f est croissante et $a = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = \inf f$.*
4. *Si f est décroissante et $a = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = \sup f$.*

Preuve :

1. On suppose f croissante et $a = +\infty$.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.27).
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.21).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Lire.

2. On suppose f décroissante et $a = +\infty$.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.30).
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.21).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.
3. On suppose f croissante et $a = -\infty$.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.36).
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.24).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.
4. On suppose f décroissante et $a = -\infty$.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.33).
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

LIre.

b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.24).

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1-|x_0|[\cap\mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$. □

Donnons un exemple simple d'application. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}(x) = x$, est strictement croissante et $\mathrm{Id}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc, par la proposition 4.36, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Id}(x) = \sup \mathbb{R} = +\infty$.

Passons maintenant aux limites en un point de $\mathbb{R}$ de fonctions monotones.

Proposition 4.37. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.*

1. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^- =]-\infty; a[\cap\mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^-} f$ existe et vaut $\sup f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est croissante, et $\inf f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est décroissante.*
2. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+ =]a; +\infty[\cap\mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\inf f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est croissante, et $\sup f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est décroissante.*

Attention : Il se peut que, pour $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone, $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas, même si $a \in \mathcal{D}$. Reprenons l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. f est croissante et définie en 0 mais on a vu que $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas.

Preuve de la proposition 4.37 :

1. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f croissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ en utilisant (4.15) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.

Lire.

2. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f décroissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$ en utilisant (4.18) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.

Lire.

3. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f croissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ en utilisant (4.18) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$.
4. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f décroissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ en utilisant (4.15) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. □

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux fonctions réelles continues sur un intervalle. On rappelle que la notion de continuité sur un intervalle a été définie dans la définition 4.14.

Théorème 5.1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non vide inclu dans $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle qui est continue sur I. Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout réel ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ compris entre a et b tel que $\ell = f(x)$.*

Preuve : Soit $(a; b) \in I^2$ et ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si $\ell = f(a)$ (resp. $\ell = f(b)$), $x = a$ (resp. $x = b$) convient.
Si $f(a) = f(b)$, $\ell = f(a)$ donc $x = a$ convient.
Si $a = b$, on a encore $f(a) = f(b)$ donc $\ell = f(a)$ et $x = a$ convient encore.
On suppose désormais que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$, $\ell \neq f(a)$ et $\ell \neq f(b)$. On traite séparément les trois cas suivants : ($a < b$ et $f(a) > f(b)$) ; ($a < b$ et $f(a) < f(b)$) ; $a > b$.

a). Cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit $\ell \in]f(b); f(a)[$. Soit

$$A := \{x \in [a; b] ; \quad f(x) > \ell\} .$$

A est non vide car $a \in A$, par hypothèse. On a $A \subset [a; b] \subset I$. Soit $s = \sup A$. Comme A est majorée par b, $s \leq b$. Comme $a \in A$, $a \leq s$. Donc $s \in [a; b] \subset I$. Par la proposition 3.45, il existe une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $s = \lim\limits_{n} s_n$. Comme f est continue sur I, elle est continue