

Continuité sur un intervalle, dérivabilité.

Exercice 75. :

1. Construire une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0; 1]) = [0; 1] \cup [1; 2]$.
2. Construire une fonction continue $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0; 1[) = [0; 1]$.
3. Construire une fonction continue $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0; 1[) = [0; +\infty[$.
4. Construire une fonction continue $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0; +\infty[) =]0; 1]$.

On justifiera soigneusement le calcul de l'image par f de l'intervalle pertinent.

Exercice 76. : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$. Vérifier que $f(0) < 0$ et $f(3) > 0$. En déduire qu'il existe $x \in]0; 3[$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 77. : Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Montrer que f admet au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 78. : Montrer que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

Remarque : on retrouve ici le fait que la fonction partie entière, qui n'est pas constante, n'est pas continue sur \mathbb{R} , ce que l'on avait déjà obtenu dans l'exercice 62.

Exercice 79. : Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\lim_a f = \lim_b f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas injective.
2. Qu'en est-il si $\lim_a f = \lim_b f = +\infty$?

Exercice 80. : Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Montrer que, pour tout $(m; M) \in \mathbb{R}^2$ avec $m \leq M$, la restriction $f|_{[m; M]}$ de f à $[m; M]$ est bornée.

Exercice 81. : Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$. Soit \mathcal{P} la proposition : (il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \geq \lambda$).

1. On suppose $I = [a; b]$, avec $a < b$ dans \mathbb{R} , et f continue. Montrer que \mathcal{P} est vraie.
2. On suppose que $I = [0; 1[$ et que f est continue. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel \mathcal{P} est fausse.
3. On suppose que $I = [1; +\infty[$ et que f est continue. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel \mathcal{P} est fausse.
4. On suppose $I = [0; 1]$. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel \mathcal{P} est fausse.

Exercice 82. : Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ telle que les limites $\lim_0 f$ et $\lim_{+\infty} f$ existent.

1. On suppose que f est continue et que $+\infty = \lim_0 f = \lim_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
2. On suppose que f est continue et qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) < \lim_0 f < +\infty$ et $f(b) < \lim_{+\infty} f < +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
3. On suppose que f est continue et qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) \leq \lim_0 f < +\infty$ et $f(b) \leq \lim_{+\infty} f < +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
(Indication : on pourra séparer le cas où $f(b) = \inf f$ du cas où $f(b) > \inf f$.)
4. Donner un exemple d'une telle fonction continue f vérifiant $\lim_0 f > \lim_{+\infty} f > -\infty$ et telle que $\inf f \notin f(]0; +\infty[)$.
5. Donner un exemple d'une telle fonction continue f vérifiant $\lim_{+\infty} f > \lim_0 f > -\infty$ et telle que $\inf f \notin f(]0; +\infty[)$.
6. Donner un exemple d'une telle fonction f vérifiant $\lim_0 f > -\infty$ et $\lim_{+\infty} f > -\infty$ et telle que $\inf f = -\infty$.

Exercice 83. : VRAI ou FAUX ? Toute réponse doit être justifiée.

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

2. Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
3. Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Si $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.
5. Si $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.
6. Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $1/f$ est bornée.
7. L'image du segment $[a; b]$ par une fonction continue sur $[a; b]$ est un certain segment $[c; d]$ (avec $(c; d) \in \mathbb{R}^2$ et $c \leq d$).
8. L'image de l'intervalle $]a; b[$ (avec $a < b$) par une fonction continue sur $]a; b[$ est un certain intervalle $]c; d[$ (avec $(c; d) \in \mathbb{R}^2$ et $c < d$).
9. Si l'image par $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a; b]$ est un segment, alors f est continue.
10. Si l'image par $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a; b]$ n'est pas un segment, alors f n'est pas continue.
11. Si $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est positive et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M; +\infty[$.
12. Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.

Exercice 84. : Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes. On admettra que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0.

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_1(x) = 0$ et, pour $x \geq 0$, $f_1(x) = 2x - 1$.
2. Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_2(x) = 0$ et, pour $x \geq 0$, $f_2(x) = x^3 + x$.
3. Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_3(x) = -x^3$ et, pour $x \geq 0$, $f_3(x) = -x^5 + 3x^2$.
4. Soit $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) = |x| \sin(x)$.
5. Soit $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_5(x) = |x| \cos(x)$.

Exercice 85. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que, si f est paire, alors f' est impaire. Étudier la réciproque.

2. Montrer que, si f est impaire, alors f' est paire. Étudier la réciproque.
3. Montrer que, si f est périodique de période $T > 0$ (cf. exercice 71), alors f' est aussi périodique de période T . Étudier la réciproque.
4. On suppose f' est périodique de période $T > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \alpha x$, est périodique de période T .

Exercice 86. : On **admet** que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\exp' = \exp$. On **admet** que $\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et que, pour $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. On **admet** que $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\sin' = \cos$.

1. Montrer la proposition :

$$\forall x > 0, \quad x > \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}.$$

2. Montrer la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$, on pose $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$. Montrer, pour $\alpha > 0$, la proposition :

$$\frac{1}{2^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} \right).$$

Exercice 87. : Soit \mathcal{S} l'ensemble des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $a_0 > 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k. \quad (9)$$

Soit \mathcal{S}^* le sous-ensemble de \mathcal{S} des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $a_0 > 0$, (9) soit vraie et qu'il existe $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec $a_j > 0$.

Soit \mathcal{S}^{**} le sous-ensemble de \mathcal{S} des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \dots; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tels que on ait (9).

On remarque que, si $P \in \mathcal{S}^*$, alors le degré de P est strictement supérieur à 1.

Pour une fonction polynômiale P , on notera aussi par P le polynôme associé.

1. Soit $P \in \mathcal{S}$. Montrer que $\lim_{+\infty} P$ existe et vaut $+\infty$.
2. Soit $P \in \mathcal{S}$. Montrer qu'il existe $x \geq 0$ tel que $P(x) = 0$.

3. Soit $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré $n > 1$. Vérifier que $(1/n)P' \in \mathcal{S}^{**}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : (Pour tout $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré n , P a une unique racine réelle positive.). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
5. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré $n + 1$. Montrer que P a une unique racine réelle positive.
(Indication : on pourra procéder par l'absurde.)
6. En déduire que tout $P \in \mathcal{S}^{**}$ admet une unique racine réelle positive.
7. Soit $P \in \mathcal{S}^*$ de degré $n > 1$. Vérifier qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$, $j \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ et $Q \in \mathcal{S}^{**}$ tel que $P' = cX^{j-1}Q$.
8. En déduire que P admet une unique racine réelle positive.
(Indication : on pourra procéder par l'absurde.)
9. Soit $P \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^*$. Montrer que P a une unique racine réelle positive.
10. Soit $P \in \mathcal{S}$. D'après les résultats précédents, P a une unique racine réelle positive, que l'on note par α_P . Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P .
 - a). Montrer que $P(|z|) \leq 0$.
 - b). En déduire que $|z| \leq \alpha_P$.
 - c). On suppose que $P = X^3 - a_0 - a_1X - a_2X^2$, avec $(a_0; a_1; a_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ et que $|z| = \alpha_P$. Montrer que $a_1z + a_2z^2 \in \mathbb{R}^+$.
 - d). En déduire que $z = \alpha_P$.