Déjà vu.

tend vers $-\infty$. Contradiction puisqu'on a vu que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc minorée.

2. On montre maintenant que les bornes supérieure et inférieure de f sont des valeurs de f.
   a). Notons $m_+ = \sup f$. On sait, par 1, que $m_+ \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_+, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_+. En procédant comme au 1.a), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x\circ\varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_+ \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_+. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_+ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_+)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_+ (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_+ = f(\ell_+)$.
   b). Notons $m_- = \inf f$. On sait, par 1, que $m_- \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_-, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_-. En procédant comme au 1.b), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x\circ\varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_- \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_-. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_- de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_-)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_- (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_- = f(\ell_-)$.
3. On montre que $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.
   Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a $f([a;b]) \subset [\inf f; \sup f]$. Par 1 et 2, on sait que $\inf f \in f([a;b])$ et $\sup f \in f([a;b])$. Par le corollaire 5.2, on sait que $f([a;b])$ est un intervalle. Donc $f([a;b])$ contient $[\inf f; \sup f]$. On a montré l'égalité souhaitée par double inclusion. □

6 Dérivabilité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Nombres dérivés, dérivée.

Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Près de a, on cherche à approcher “le mieux possible” le graphe de f par une droite non verticale passant par le point $(a; f(a))$.
Les droites de ce type se distinguent les unes des autres par leur pente. S'il existe une telle droite qui approche “mieux” le graphe de f que les autres, on dira que f est dérivable en a et la pente p de cette droite sera le nombre dérivé de f en a. Dans ce cas, le nombre dérivé en a donne une idée du comportement de f près de a puisque le graphe de f y ressemble à la droite d'équation $y = f(a) + p(x-a)$. Cette dernière sera appelée la tangente à f en a.
Si $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $a = 0$, par exemple, on sent qu'aucune droite passant par $(a; f(a))$ n'approchera le graphe de f mieux que les autres. On remarque que, dans ce cas, 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. On ne peut pas s'approcher de 0 en restant dans $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
Pour éviter ce phénomène, on imposera que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.
Comment exprimer que le graphe de f est proche d'une droite, près de a ? Cela revient essentiellement à dire que, près de a, f est proche de g, où g est la fonction dont le graphe est la droite en question. Comment exprimer que f est proche de g, près de a ? Une façon naturelle est de dire que, près de a, la

Révision, à lire.

différence $f-g$ doit être négligeable devant $g-g(a)$. Bref, on demande que $f(x)-g(x)$ soit un petit "o" de $x-a$, c'est-à-dire le produit de $(x-a)$ par une fonction que tend vers 0 en a.
Voyons un peu ce que veut dire cette dernière propriété. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{K}$, $\ell\in\mathbb{K}$ et $a\in\mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}\setminus\{a\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un voisinage U_0 de 0 et une fonction $\eta:U_0\longrightarrow\mathbb{K}$ tels que $\lim\limits_0\eta=0$ et, pour tout $h\in U_0$ avec $a+h\in\mathcal{D}$,*
$$f(a+h)\ =\ f(a)\ +\ h\cdot\ell\ +\ h\cdot\eta(h)\,. \tag{6.1}$$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *existe et vaut ℓ.*
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et vaut ℓ.*

Preuve : L'équivalence ($2\iff 3$) découle du corollaire 4.28. On montre l'équivalence ($1\iff 2$).
$1\Longrightarrow 2$: On suppose 1 vraie. Pour étudier la limite du 2, on peut restreindre h à U_0 (cf. proposition 4.16). Pour $h\in U_0\setminus\{0\}$ avec $a+h\in\mathcal{D}$, on a, d'après l'hypothèse,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ =\ \ell\ +\ \eta(h)\,.$$
Comme $\lim\limits_0\eta=0$, le membre de gauche tend vers ℓ en 0, par somme (cf. proposition 4.31). On a donc montré 2.
$2\Longrightarrow 1$: On suppose 2 vraie. Soit $\eta:]-1;1[\longrightarrow\mathbb{K}$ définie par $\eta(h)=0$ si $a+h\notin\mathcal{D}$, par $\eta(0)=0$ et par
$$\eta(h)\ =\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ -\ \ell\,,$$
si $h\neq 0$ et $a+h\in\mathcal{D}$.
$]-1;1[$ est bien un voisinage de 0. De plus, pour $h\in]-1;1[$ tel que $a+h\in\mathcal{D}$, on a bien (6.1) (y compris pour $h=0$). Il reste à montrer que $\lim\limits_0\eta=0$. On le fait en utilisant (4.12).
Soit $\epsilon>0$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta'>0$ tel que, pour $h\in]-\delta';\delta'[$ avec $a+h\in\mathcal{D}$, on ait
$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ -\ \ell\right|\ <\ \epsilon\,.$$
Soit $\delta=\min(1;\delta')$. Pour $h\in]-\delta;\delta[\subset]-1;1[$, on a, si $a+h\notin\mathcal{D}$, $|\eta(h)|=0<\epsilon$, et, si $a+h\in\mathcal{D}$, on a $h\in]-\delta';\delta'[$ et, d'après ce qui précède, $|\eta(h)|<\epsilon$. On a montré 1. □

Définition 6.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{K}$ et $a\in\mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}\setminus\{a\}$. Lorsqu'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s), on dit que f est dérivable en a de nombre dérivé en a ℓ. On note ce dernier par $f'(a)$. La droite d'équation $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ est appelée la tangente à f en a.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ à $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à droite en a de nombre dérivée en a à droite ℓ. On note ce dernier par $f'_d(a)$. La droite d'équation $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à gauche en a de nombre dérivée en a à gauche ℓ. On note ce dernier par $f'_g(a)$. La droite d'équation $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à gauche.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) sur $\mathcal{D}'$ si, pour tout $a\in\mathcal{D}'$, f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en a. Dans ce cas, la dérivée (resp. dérivée à droite, resp. dérivée à gauche) de f sur $\mathcal{D}'$ est la fonction $f':\mathcal{D}'\longrightarrow\mathbb{K}$ (resp. $f'_d:\mathcal{D}'\longrightarrow\mathbb{K}$, resp. $f'_g:\mathcal{D}'\longrightarrow\mathbb{K}$) qui, à $x\in\mathcal{D}'$ associe $f'(x)$ (resp. $f'_d(x)$, resp. $f'_g(x)$).

Révision, à lire.

Remarque 6.3. *Dans le cadre de la définition 6.2, on suppose que f est dérivable en a. Pour $p \in \mathbb{K}$, soit $g_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $g_p(x) = f(a) + p(x-a)$. On a $g_p(a) = f(a)$. Le graphe de g_p est donc une droite non verticale qui passe par le point $(a; f(a))$. On a, pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$,*

$$f(a+h) - g_p(a+h) = h \cdot \big(f'(a) - p + \eta(h)\big) .$$

Si $p = f'(a)$ alors on a $|f(a+h) - g_p(a+h)| \leq |h| \cdot |\eta(h)|$ avec h et η tendant vers 0 en 0.
Si $p \neq f'(a)$ alors, comme η tend vers 0 en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait

$$|\eta(h)| < \frac{|p - f'(a)|}{2} .$$

Pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc

$$\big|f(a+h) - g_p(a+h)\big| \geq |h| \cdot \frac{|p - f'(a)|}{2} .$$

Le terme de droite tend certes vers 0 en 0 mais comme h, donc "moins vite" que $h\eta(h)$. C'est dans ce sens que la tangente à f en a (i.e. $g_{f'(a)}$) est plus proche de f que les autres droites g_p.

Voyons quelques exemples simples. Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$ tel que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $f(a+h) = c = f(a) = f(a) + h \cdot 0 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, f est dérivable en a de nombre dérivé 0. En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée nulle sur $\mathcal{D}$.
Vérifions que la fonction $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}(x) = x$ est dérivable en a de nombre dérivé 1. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $\mathrm{Id}(a+h) = a+h = \mathrm{Id}(a) + h = \mathrm{Id}(a) + h \cdot 1 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, Id est dérivable en a de nombre dérivé 1. En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc Id est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.

Proposition 6.4. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. En particulier, si f est dérivable sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}'$.*

Remarque 6.5. *On a aussi une version "à droite" et une version "à gauche" de la proposition 6.4.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.4 à la restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ de f à $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à droite alors f est continue en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a] \cap \mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.4 à la restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ de f à $]-\infty;a] \cap \mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à gauche alors f est continue en a à gauche.

Preuve de la proposition 6.4 : Par hypothèse, la propriété 1 de la proposition 6.1 est vraie. On sait que $\lim_{h\to 0} h = 0$ et, comme $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$, on a, par produit (cf. proposition 4.31), $\lim_{h\to 0} h\eta(h) = 0$. Chacun des termes du membre de droite de l'égalité (6.1) a donc une limite en 0, à savoir $f(a)$, 0 et 0, respectivement. Par somme (cf. proposition 4.31), on en déduit que le membre de droite de (6.1) tend vers $f(a)$, ce qui démontre que f a une limite en a donc f est continue en a. □

Attention : la réciproque est fausse. Une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. C'est ce qui se produit avec la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On peut vérifier qu'elle est continue en 0, dérivable à droite en 0 de nombre dérivé à droite 1, dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé à gauche -1, mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 6.6. *Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ soit une partie infinie de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}'$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Révision, à lire.

1. *Alors les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et λf sont dérivables sur $\mathcal{D}'$ de dérivée $f'+g'$, $f' \cdot g + f \cdot g'$ et $\lambda f'$, respectivement.*
2. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, alors $1/f$ est définie et dérivable sur $\mathcal{D}'$, de dérivée $-f'/f^2$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'$. Par hypothèse, on sait que le 1 de la proposition 6.1 est vrai pour f et pour g. Il existe donc un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a+h \in \mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire

$$f(a+h) \;=\; f(a) \,+\, h \cdot f'(a) \,+\, h \cdot \eta_1(h)\,. \tag{6.2}$$

Il existe un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_2$ avec $a+h \in \mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g(a+h) \;=\; g(a) \,+\, h \cdot g'(a) \,+\, h \cdot \eta_2(h)\,. \tag{6.3}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.6). Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$(\lambda \cdot f)(a+h) \;=\; (\lambda \cdot f)(a) \,+\, h \cdot \big(\lambda \cdot f'(a)\big) \,+\, h \cdot (\lambda \cdot \eta_1)(h)\,,$$

où la fonction $\lambda \eta_1$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.31). Donc λf est dérivable en a de nombre dérivée $\lambda f'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$(f + g)(a+h) \;=\; (f + g)(a) \,+\, h \cdot \big(f'(a) + g'(a)\big) \,+\, h \cdot (\eta_1 + \eta_2)(h)\,,$$

où la fonction $\eta_1 + \eta_2$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.31). Donc $f+g$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)+g'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a+h) \;&=\; (f \cdot g)(a) \,+\, h \cdot \big(f'(a) \cdot g(a) \,+\, f(a) \cdot g'(a)\big) \\ &\quad + h \cdot \big(hf'(a)g'(a) \,+\, (g(a) \,+\, hg'(a))\eta_1(h) \,+\, (f(a) \,+\, hf'(a))\eta_2(h) \,+\, h\eta_1(h)\eta_2(h)\big)\,,\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \big(hf'(a)g'(a) \,+\, (g(a) \,+\, hg'(a))\eta_1(h) \,+\, (f(a) \,+\, hf'(a))\eta_2(h) \,+\, h\eta_1(h)\eta_2(h)\big) \;=\; 0\,,$$

d'après la proposition 4.31. Donc fg est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$. Donc f ne s'annule pas en a. Comme f est dérivable en a, elle est continue en a (cf. proposition 6.4). Donc, par le corollaire 4.28, on a

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) \;=\; \lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a) \;\neq\; 0\,.$$

Par la proposition 4.31, il existe un voisinage U_1' de a tel que $1/f$ soit définie sur $U_1' \cap \mathcal{D}_1$. Soit $U_0' = U_1' \cap U_1$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.6). Pour $h \in U_0'$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)(a+h) \,-\, \left(\frac{1}{f}\right)(a) \;&=\; -\,\frac{f(a+h) \,-\, f(a)}{f(a+h)f(a)} \;=\; -h \cdot \frac{f'(a) \,+\, \eta_1(h)}{f(a+h)f(a)} \\ &=\; -\,h \cdot \big(f'(a) \,+\, \eta_1(h)\big) \cdot \frac{1}{f(a)}\left(\frac{1}{f(a)} \,+\, \frac{1}{f(a+h)} \,-\, \frac{1}{f(a)}\right) \\ &=\; -\,h \cdot \frac{f'(a)}{f(a)^2} \,-\, h \cdot \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} \,+\, \frac{f'(a) \,+\, \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} \,-\, \frac{1}{f(a)}\right)\right)\end{aligned}$$

Révision, à lire.

Révision, à lire.

avec

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2}+\frac{f'(a)+\eta_1(h)}{f(a)}\cdot\left(\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right)\right) = 0\,,$$

d'après la proposition 4.31. Donc $1/f$ est dérivable en a de nombre dérivé $-f'(a)/f(a)^2$. □

Dans le cadre de cette proposition 6.6, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, $f/g = f\cdot(1/g)$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et on obtient, pour $a\in\mathcal{D}'$,

$$(f/g)'(a) = f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)} + f(a)\cdot\frac{-g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

On termine ce paragraphe par la composition.

Proposition 6.7. *Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties infinies de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}_1$. Soit $f:\mathcal{D}_1\longrightarrow\mathcal{D}_2$ une fonction réelle, qui est dérivable sur $\mathcal{D}'$, et $g:\mathcal{D}_2\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'image $f(\mathcal{D}')$ de $\mathcal{D}'$ par f. Alors $g\circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et, pour $a\in\mathcal{D}'$,*

$$(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)\,. \tag{6.4}$$

Preuve : Soit $a\in\mathcal{D}'$. On montrer que $g\circ f$ est dérivable en a. Comme f est dérivable en a, il existe un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1\longrightarrow\mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h\in U_1$ avec $a+h\in\mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire (6.2). Comme $a\in\mathcal{D}'$, $f(a)\in f(\mathcal{D}')$ et, comme g est dérivable sur $f(\mathcal{D}')$, g est dérivable en $f(a)$. Il existe donc un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2\longrightarrow\mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $k\in U_2$ avec $f(a)+k\in\mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec a remplacée par $f(a)$, f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + k\cdot g'\big(f(a)\big) + k\cdot\eta_2(k)\,. \tag{6.5}$$

Soit $V_2 = \{t\in\mathbb{R}; t-f(a)\in U_2\}$. C'est un voisinage de $f(a)$. Comme f est dérivable en a, elle y est continue (cf. proposition 6.4). Donc, par le corollaire 4.28, on a

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

Il existe donc un voisinage U_1' de 0 tel que, pour $h\in U_1'$ avec $a+h\in\mathcal{D}_1$, on ait $f(a+h)\in V_2$. Soit $U_1'' = U_1\cap U_1'$. C'est un voisinage de a (cf. proposition 2.6).
Pour $h\in U_1''$ avec $a+h\in\mathcal{D}_1$, on a $h\in U_1'$ donc $f(a+h)\in V_2$ et $k := f(a+h)-f(a)\in U_2$. On a aussi $f(a+h)\in\mathcal{D}_2$. Donc, par (6.5),

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + k\cdot g'\big(f(a)\big) + k\cdot\eta_2(k)\,.$$

Comme $h\in U_1$ et $a+h\in\mathcal{D}_1$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) &= g\big(f(a)\big) + h\cdot\big(f'(a)+\eta_1(h)\big)\cdot g'\big(f(a)\big) + k\cdot\eta_2(k) \\ &= g\big(f(a)\big) + h\cdot f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big) + h\cdot\Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) + \big(f'(a)+\eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a+h)-f(a)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

D'après les propositions 4.27 et 4.31,

$$\lim_{h\to 0}\Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) + \big(f'(a)+\eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a+h)-f(a)\big)\Big) = 0$$

donc $g\circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)$. □

6.2 Fonctions réelles dérivables et théorème des accroissements finis.

Dans ce paragraphe, on se penche sur les fonctions réelles dérivables. On s'intéresse aux extréma de telles fonctions. On montre ensuite le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. On termine en justifiant le fait qu'une fonction dérivable de dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.

Définition 6.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$.*
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.3). Dans ce cas, $f(a)$ est le maximum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur maximale locale de f.
On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.3). Dans ce cas, $f(a)$ est le minimum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur minimale locale de f.
Lorsque $f(a)$ majore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le maximum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un maximum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur maximale de f.
Lorsque $f(a)$ minore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le minimum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un minimum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur minimale de f.
On dif que f admet un extrémum (resp. extrémum local) en a si elle admet un maximum (resp. maximum local) en a ou bien si elle admet un minimum (resp. minimum local) en a.

On remarque qu'un extrémum global est aussi un extrémum local (il suffit de prendre $\mathbb{R}$ comme voisinage de a). La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ admet un minimum global en 0. Elle n'admet aucun maximum local. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$ si $x \in [-1; 1]$ et $g(x) = -|x|$ si $x \notin [-1; 1]$. Elle admet un minimum local en 0 mais n'a pas de minimum global. Elle admet de maxima locaux : en 1 et -1. Ces deux maxima sont en fait globaux.

Voyons maintenant l'influence de la dérivabilité sur les extréma locaux.

Proposition 6.9. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extrémum local en $a \in I$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Attention : Si, dans cette proposition 6.9, l'intervalle n'est pas ouvert, le résultat peut être faux. C'est le cas pour la fonction $\mathrm{Id} : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0; 1]$, associe x. Elle est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée constante égale à 1 sur $[0; 1]$. Elle admet un minimum global en 0 mais on a $\mathrm{Id}'(0) = 1 \neq 0$.
Dans le cadre de la proposition 6.9, un point a qui vérifie $f'(a) = 0$ (on appelle cela un point critique de f), n'est pas forcément un extrémum de f. C'est le cas pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3x^2$. Le point 0 est un point critique de f puisque $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Mais 0 n'est pas un extrémum local de f.

Preuve de la proposition 6.9 : Soit $a \in I$ un extrémum local de f. Comme I est un intervalle ouvert, a est adhérent aux ensembles $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $I_a^- =]-\infty; a[\cap I$.

Lire.

a). On suppose que a est un maximum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$
Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Comme $f(a)$ majore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$
Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$.

b). On suppose que a est un minimum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Comme $f(a)$ minore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$. □

Cette proposition 6.9 va nous permettre de démontrer un cas particulier du futur théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), à savoir :

Théorème 6.10. *Théorème de Rolle. Soit* $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, continue sur* $[a; b]$*, dérivable sur* $]a; b[$*, et qui vérifie* $f(a) = f(b)$*. Alors il existe* $c \in]a; b[$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

En particulier, pour une fonction dérivable (donc continue), il existe un point critique entre de points prenant la même valeur par f. Pour préparer la preuve de ce théorème 6.10, on le montre dans un cas particulier.

Lemme 6.11. *Soit* $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, continue sur* $[a; b]$*, dérivable sur* $]a; b[$*, et qui vérifie* $g(a) = g(b) = 0$*. Alors il existe* $c \in]a; b[$ *tel que* $g'(c) = 0$*.*

Preuve : Soit $m_+ = \sup g([a; b])$ et $m_- = \inf g([a; b])$. Comme g est continue, on sait, d'après le théorème 5.3, m_+ et m_- sont réelles et sont des valeurs de g. Comme $g(a) = 0$, on a $m_- \leq 0 \leq m_+$.

a). Cas où $m_- = 0 = m_+$. Par définition des bornes supérieure et inférieure, g est nulle. Sa dérivée est donc nulle aussi. Tout point $c \in]a; b[$ vérifie $g'(c) = 0$.

b). Cas où $0 < m_+$. Soit $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = m_+$. Comme $g(a) = 0 < m_+$ et $g(b) = 0 < m_+$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a; b[$. De plus, g admet un maximum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a; b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.9, $g'(c) = 0$.

Lire.

c). Cas où $m_- < 0$. Soit $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = m_-$. Comme $g(a) = 0 > m_-$ et $g(b) = 0 > m_-$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a; b[$. De plus, g admet un minimum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a; b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.9, $g'(c) = 0$. □

Preuve du théorème 6.10 : Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(a)$. Par hypothèse, f est continue sur $[a; b]$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi continue. Par somme (cf. proposition 4.31), g est continue sur $[a; b]$. Par hypothèse, f est dérivable sur $]a; b[$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi dérivable. Par somme (cf. proposition 6.6), g est dérivable sur $]a; b[$ et $g' = f' - 0 = f'$. De plus, comme $f(a) = f(b)$, on a $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) = 0$. Par le lemme 6.11, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g' = f'$, on a aussi $f'(c) = 0$. □

On établit maintenant la généralisation suivante du théorème de Rolle.

Théorème 6.12. *Théorème des accroissements finis. Soit* $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, continue sur* $[a; b]$*, dérivable sur* $]a; b[$*. Alors il existe* $c \in]a; b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$*.*

Si l'on applique ce théorème dans le cas où $f(a) = f(b)$, on trouve un point $c \in]a; b[$ tel que $f'(c)(b - a) = 0$. Comme $a \neq b$, on en déduit que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire le résultat du théorème de Rolle.

Preuve du théorème 6.12 : Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right) .$$

D'après la proposition 4.31, g est continue sur $[a;b]$. D'après la proposition 6.6, g est dérivable sur $]a;b[$ et, pour $x \in]a;b[$,

$$g'(x) \;=\; f'(x) \;-\; \frac{f(b) \,-\, f(a)}{b-a}\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned} g(b) \;&=\; f(b) \,-\, \left(f(a) \,+\, \frac{f(b) \,-\, f(a)}{b-a} \cdot (b-a)\right) \;=\; f(b) \,-\, \big(f(a) \,+\, f(b) \,-\, f(a)\big) \;=\; 0\,, \\ g(a) \;&=\; f(a) \,-\, \left(f(a) \,+\, \frac{f(b) \,-\, f(a)}{b-a} \cdot (a-a)\right) \;=\; f(a) \,-\, f(a) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Par le théorème de Rolle (cf. théorème 6.10) appliqué à g, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$0 \;=\; f'(c) \;-\; \frac{f(b) \,-\, f(a)}{b-a}$$

et donc $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$. □

On peut maitenant démontrer le résultat suivant qui permet de dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable lorsqu'on connait le signe de sa dérivée.

Corollaire 6.13. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ (en particulier $\inf I < \sup I$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est dérivable sur $]\inf I; \sup I[$.*

1. *Si f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement croissante sur I.*
3. *Si f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est décroissante sur I.*
4. *Si f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement décroissante sur I.*
5. *Si f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est constante sur I.*

Remarque 6.14. *Insistons sur ce que dit ce résultat.*
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée positive, alors f est croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in [a;b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, même si $f'(a)$ n'est pas défini, même si $f'(b)$ n'est pas défini.
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée strictement positive, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in]a;b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$.
Pour dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable, on utilise souvent ce corollaire 6.13 en conjonction avec le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) ou son corollaire (cf. corollaire 5.2) ou encore avec le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).

Preuve du corollaire 6.13 : Soit $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$. Par hypothèse, on sait que f est continue sur $[x_-; x_+]$, dérivable sur $]x_-; x_+[$, donc, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), il existe $c \in]x_-; x_+[$, tel que $f(x_+) - f(x_-) = f'(c)(x_+ - x_-)$. On a $c \in]\inf I; \sup I[$.

1. On suppose que f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \geq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \geq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est croissante sur I.
2. On suppose que f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) > 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) > f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement croissante sur I.
3. On suppose que f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \leq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \leq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est décroissante sur I.

Lire.

4. On suppose que f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) < 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) < f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement décroissante sur I.
5. On suppose que f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) = 0$ et $f(x_+) = f(x_-)$. Donc f est constante sur I. □