Hors programme.

(6.17) donnera (6.16) avec N remplacé par $n+1$.
Sur I_a^- (resp. I_a^+), $g = f$ et f est de classe C^{n+1}, donc dérivable. De plus, sur I_a^- (resp. I_a^+), $f' = g_1$, donc $g' = g_1$ sur cet intervalle. Il reste à montrer que g est dérivable en a et que $g'(a) = g_1(a)$.
Comme g est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x; a]$ ou $[a; x]$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$, il existe donc un $c_x \in I$ strictement compris entre x et a tel que $g(x) - g(a) = g'(c_x)(x-a)$. De plus, comme g_1 est continue en a,

$$\lim_{\neq a} g' \;=\; \lim_{\neq a} g_1 \;=\; g_1(a) \;=\; \ell_1 \,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après l'existence de la limite précédente, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $y \in]a-\delta; a+\delta[\cap I$, $|g'(y) - \ell_1| < \epsilon$. Pour $x \in I$ avec $x \in]a-\delta; a+\delta[$, on a donc

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{x-a} - \ell_1 \right| \;=\; \big| g'(c_x) - \ell_1 \big| \;<\; \epsilon$$

car $c_x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I$. On a montré que g est dérivable en a de nombre dérivé $\ell_1 = g_1(a)$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, les résultats de la proposition 6.31 sont valables d'après $\mathcal{P}(N)$. Comme ces résultats sont valables pour tout $N \in \mathbb{N}$, ils le sont pour $N = \infty$. $\square$

7 Fonctions réciproques.

Dans cette partie, on donne quelques propriétés basiques sur les bijections. Ensuite, on conjugue la stricte croissance et la continuité d'une fonction pour établir la bijectivité d'une telle fonction et la continuité de sa bijection réciproque. Enfin, lorsque la fonction en question est plus régulière, on montre qu'il en est de même pour la bijection réciproque.

7.1 Injection, surjection, bijection.

On introduit ici les notions d'injection, de surjection et de bijection. On montre quelques propriétés basiques sur ces notions. En particulier, on montre des résultats annoncés dans le paragraphe 1.1.

Définition 7.1. *Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*
On dit que f est injective si

$$\forall\, (x; x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) \,=\, f(x')) \implies (x \,=\, x') \big)\,. \tag{7.1}$$

On dit que f est est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y \,=\, f(x)\,. \tag{7.2}$$

On dit que f est bijective si f est injective et f est surjective.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 7.2. *Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.*

4. *f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*
5. *f est bijective si et seulement si*

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\,!\, x \in E\,; \quad y \;=\; f(x)\,. \tag{7.3}$$

6. *f est bijective si et seulement s'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.*
7. *Si f est bijective alors il existe une unique fonction $h : F \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Cette fonction h associe, à chaque $y \in F$, l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$.*
8. *Si f est injective alors l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ définie par, pour $x \in E$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, est bijective.*

Preuve :

1. On suppose f et g injectives et on montre que $g \circ f$ est injective en utilisant (7.1) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $(x; x') \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$. On a montré que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose f et g surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective en utilisant (7.2) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Comme f est surjective et $z \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. On a donc $y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. On a montré que $g \circ f$ est surjective.
3. Par définition de la bijectivité, il suffit d'appliquer 1 et 2.
4. Par définition de f, on a $f(E) \subset F$. On a donc

Lire.

$$\big(f(E) \;=\; F\big) \iff \big(F \;\subset\; f(E)\big) \;=\; \big(\forall\, y \in F\,,\, y \in f(E)\big) \iff \big(\forall\, y \in F\,, \exists\, x \in E\,;\; y \;=\; f(x)\big)\,.$$

5. On montre les deux implications. $\Longrightarrow)$: On suppose f bijective. Soit $y \in F$. On considère l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Comme f est surjective, cette équation a au moins une solution. Si x et x' sont des solutions de cette équation alors, $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. On a montré (7.3).
   $\Longleftarrow)$: On suppose (7.3) vraie. Soit $(x_1; x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Soit $y = f(x_1) = f(x_2) \in F$. x_1 et x_2 sont donc des solutions de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Par (7.3), cette équation a une unique solution donc $x_1 = x_2$. On a montré que f est injective.
   Pour $y \in F$, on sait, par (7.3), qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a montré que (7.2) est vraie donc que f est surjective.
   On a montré que f est bijective.
6. On montre les deux implications.
   $\Longrightarrow)$: On suppose f bijective. Soit $y \in F$. D'après le 5 et (7.3), l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$ a une unique solution que l'on note $h(y)$. On construit ainsi une application $h : F \longrightarrow E$.
   Pour $y \in F$, on a, par définition de $h(y)$, $f(h(y)) = y$. On a montré que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.
   Pour $x_1 \in E$, soit $y = f(x_1)$. Comme x_1 est solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, on a $x_1 = h(y)$ donc $x_1 = h(f(x_1))$. On a montré que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   $\Longleftarrow)$: On suppose qu'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit $y \in F$. Comme $y = (f \circ h)(y)$, on a $y = f(h(y))$ donc l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, a pour solution $h(y)$. Si $x' \in E$ est une solution de cette équation, alors on a, $f(x') = y$ donc $h(f(x')) = h(y)$ et, d'après $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, $x' = h(y)$. Donc cette équation a une unique solution. On a donc montré (7.3) et, par 5, que f est bijective.

Lire.

7. On suppose f bijective. Soit $h : F \longrightarrow E$ une application donnée par le membre de droite de 6. Soit $k : F \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ k = \mathrm{Id}_F$ et $k \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $k(y) = k(f(x)) = (k \circ f)(x) = x = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$. On a montré que $k = h$. D'après la preuve de 6, le reste de l'affirmation dans 7 est vrai.
8. Comme $\tilde{f}(E) = f(E)$, $\tilde{f}$ est surjective. Soit $(x_1; x_2) \in E^2$ tel que $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$. Par définition de $\tilde{f}$, on a $f(x_1) = f(x_2)$ et, comme f est injective, on a $x_1 = x_2$. On a montré que $\tilde{f}$. D'où $\tilde{f}$ est bijective. $\square$

Définition 7.3. *Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, l'application $h : F \longrightarrow E$, qui vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, est appelée bijection réciproque de f et est notée par $f^{\langle -1 \rangle} := h$.*
Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dira que f est bijective de E sur $f(E)$. Cela se réfère au fait que l'application $\tilde{f}$ dans la proposition 7.2 est bijective. De manière abusive, on dira que la bijection réciproque $(\tilde{f})^{\langle -1 \rangle}$ de $\tilde{f}$ est la bijection réciproque de f et on la notera $f^{\langle -1 \rangle}$.

7.2 Fonctions continues strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on revient sur les fonctions réelles monotones. On travaille donc avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour une fonction monotone sur un intervalle, on dispose d'une condition suffisante étonnante pour avoir la continuité de la fonction.

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Si l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors f est continue sur I.*

Preuve : Si l'intervalle $f(I)$ est un singleton $\{c\}$, avec $c \in \mathbb{R}$, alors f est constante égale à c donc continue sur I. On suppose désormais que $f(I)$ est un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On montre que f est continue en a en utilisant (4.12). On rappelle que $\sup f := \sup f(I)$ et $\inf f := \inf f(I)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on remarque que $]\inf f; \sup f[\subset f(I)$.

1. Cas où f est croissante. On distingue les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.
   a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup \{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a) + \epsilon[$. Comme f est croissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a + \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

   LIre.

   b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup \{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est croissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a - \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
   Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+] \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+] \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est croissante, on a forcément $c_- < a < c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_-; c_+ - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $c_- \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_+$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

Lire.

2. Cas où f est décroissante. On distingue aussi les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.

Lire.

a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup \{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a) + \epsilon[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a - \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup \{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a + \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+] \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+] \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est décroissante, on a forcément $c_- > a > c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_+; c_- - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $c_+ \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_-$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a. $\square$

Maintenant, voyons ce que l'on peut dire des fonctions réelles continues et strictement monotones sur un intervalle.

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors $f(I)$ est un intervalle et f est bijective de I sur $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.*

Preuve : Par le corollaire 5.2, on sait que $f(I)$ est un intervalle. Vérifions que f est injective.
Soit $(x; x') \in I^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est aussi contradictoire avec l'hypothèse. Donc $x = x'$. On a montré que f est injective.
D'après la définition 7.3, f est bijective de I sur $f(I)$. Vérifions que sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est strictement monotone de même sens de variation que f.

a). Cas où f est strictement croissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement croissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x < x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) < f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante.

Lire.

b). Cas où f est strictement décroissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement décroissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x > x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) > f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement décroissante.

L'application $f^{\langle -1 \rangle}$ est définie sur un intervalle, à savoir $f(I)$, son image est un intervalle, à savoir I. De plus, elle est strictement monotone donc monotone. Par la proposition 7.4, elle est continue sur $f(I)$. $\square$

Dans le cadre de la proposition 7.5, on peut se demander si l'on a des informations sur l'image $f(I)$ de I par f. Lorsque I est un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé et borné), on a déjà une réponse donnée par le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).
Prenons $I = [a; b]$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante et continue. Alors, par ce théorème, $f(I)$ s'écrit $[m; M]$ où $m = \inf f$ et $M = \sup f$. Comme f est croissante, on a bien sûr $m = f(a)$ et $M = f(b)$. Donc $f(I) = [f(a); f(b)]$.
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement décroissante et continue, on voit de même que $f(I) = [f(b); f(a)]$.

Qu'en est-il si I n'est pas un segment ?

Proposition 7.6. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Soit $a = \inf I \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $b = \sup I \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On rappelle que les limites $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b f$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (cf. propositions 4.36 et 4.37). Alors,*

1. *si f est strictement croissante,*
$$f(]a;b[) = \Big]\lim_a f\,;\,\lim_b f\Big[\,,$$
2. *si f est strictement décroissante,*
$$f(]a;b[) = \Big]\lim_b f\,;\,\lim_a f\Big[\,.$$

Dans le cadre de la proposition 7.5, cette proposition 7.6 s'applique, puisque qu'une fonction strictement monotone est aussi monotone. De plus, pour déterminer complètement $f(I)$, il suffit de calculer $f(a)$ si $a \in I$ et $f(b)$ si $b \in I$. En effet,
si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a;b[$ et $f(I) = f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a;b[= \{a\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a;b] = \{b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(b)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \in I$, alors $I = [a;b] = \{a;b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a); f(b)\} \cup f(]a;b[)$.

Preuve de la proposition 7.6 : Soit g la restriction de f à $]a;b[$. On a $f(]a;b[) = g(]a;b[)$. Comme f est continue, g est continue, d'après la proposition 4.21. Comme f est strictement monotone, g est strictement monotone de même sens de variation que f. Comme f et g sont monotones, on sait, par les propositions 4.36 et 4.37, que $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$, $\lim\limits_b f$ et $\lim\limits_b g$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Par la proposition 4.21, $\lim\limits_a g = \lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b g = \lim\limits_b f$.

1. Cas où f est strictement croissante. Par les propositions 4.36 et 4.37 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \inf g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \sup g(]a;b[)$.
Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-; x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.2). Comme g est strictement croissante, on a $g(x_-) < g(x_0) < g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \leq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_a g \leq g(x_-) < g(x_0)$. Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \geq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_b g \geq g(x_+) > g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$.
Soit $y \in]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$. On a donc $y \in]\inf g(]a;b[); \sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est croissante, $x_- < x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_-; x_+]$, $y \in g([x_-; x_+]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[\subset g(]a;b[)$.
Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$.

Lire.

2. Cas où f est strictement décroissante. Par les propositions 4.36 et 4.37 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \sup g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \inf g(]a;b[)$.
Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-; x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.2). Comme g est strictement décroissante, on a $g(x_-) > g(x_0) > g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \geq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_a g \geq g(x_-) > g(x_0)$. Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \leq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_b g \leq g(x_+) < g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$.
Soit $y \in]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$. On a $y \in]\inf g(]a;b[); \sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe

Lire.

$x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est décroissante, $x_- > x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_+;x_-]$, $y \in g([x_+;x_-]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim_b g; \lim_a g[\subset g(]a;b[)$.

Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim_b g; \lim_a g[$. □

7.3 Fonctions dérivables strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on continue l'étude des fonctions réelles monotones en considérant l'influence de la dérivabilité.

Proposition 7.7. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f. De plus, pour tout point $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé*

$$\left(f^{\langle -1\rangle}\right)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)}\,.$$

Preuve : Comme f est dérivable sur I, elle y est continue, d'après la proposition 6.4. On peut donc appliquer la proposition 7.5. Ceci prouve que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.
Soit $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$. On montre que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 en utilisant la proposition 6.1.
Pour $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$, on a, par l'injectivité de $f^{\langle -1\rangle}$, $f^{\langle -1\rangle}(y) \neq f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ donc

$$\frac{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}{y - y_0} \;=\; \left(\frac{y - y_0}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1} \;=\; \left(\frac{f\left(f^{\langle -1\rangle}(y)\right) \,-\, f\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1}\,. \tag{7.4}$$

Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue en y_0, on a $\lim_{y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ et, d'après la proposition 4.21, $\lim_{\neq y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$. Comme f est dérivable en $f^{\langle -1\rangle}(y_0)$, on a

$$\lim_{x \to f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \frac{f(x) \,-\, f\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)}{x \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)\,.$$

Par composition de limites (cf. proposition 4.27), on a

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} \frac{f\left(f^{\langle -1\rangle}(y)\right) \,-\, f\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right) \;\neq\; 0\,,$$

par hypothèse. Par inversion de limite (cf. proposition 4.27) et (7.4), on en déduit que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé

$$\left(f'\left(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\right)\right)^{-1}.$$

□

Corollaire 7.8. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^1 sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^1 sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant*

$$J \;\subset\; \left\{y \in f(I)\,; \quad f'\left(f^{\langle -1\rangle}(y)\right) \neq 0\right\} \;=:\; \mathcal{P}(f)\,.$$

Hors programme.

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. La dérivée f' de f ne s'annule donc pas sur $f^{\langle -1\rangle}(F)$.
Par la proposition 7.7, on sait que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I. De plus, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable sur F et sa dérivée est $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J et f' est continue sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$, $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J, par composition (cf. proposition 6.16). Comme $f^{\langle -1\rangle}(J) \subset f^{\langle -1\rangle}(F)$, f' ne s'annule pas sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$ donc, par inversion (cf. proposition 6.16), $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$ est aussi continue sur J. Par la définition 6.17, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^1 sur J. □

Lorsque la fonction f est plus régulière, il en est de même de sa bijection réciproque.

Corollaire 7.9. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^N sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^N sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant*

$$J \;\subset\; \big\{y \in f(I)\,; \quad f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \neq 0\big\} \;=:\; \mathcal{P}(f)\,.$$

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable sur I. On sait, par la proposition 7.7, qu'elle est bijective de I sur $f(I)$ et que sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I et dérivable sur tout intervalle $J \subset F$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ l'implication

$$\big(f \text{ est } C^n \text{ sur } I\big) \Longrightarrow \big(f^{\langle -1\rangle} \text{ est } C^n \text{ sur } J\big)\,.$$

Par le corollaire 7.8, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, on suppose que f est C^{n+1} sur I. Par la définition 6.23, f' est C^n sur I et donc aussi sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$. Par la proposition 6.22, on sait que f est C^n sur I et donc, par l'hypothèse de récurrence, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J. Par la proposition 7.7, on sait que $(f^{\langle -1\rangle})'$ est donnée par $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$. Par composition (cf. proposition 6.29), $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J et, comme $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ ne s'annule pas sur J, puisque $J \subset F$, on en déduit que, par inversion (cf. proposition 6.29), $(f^{\langle -1\rangle})'$ est C^n sur J. D'après la définition 6.23, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^{n+1} sur J. On a montré donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(N)$ prouve que $f^{\langle -1\rangle}$ est C^N sur J. Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a le résultat aussi pour $N = \infty$. □

Hors programme.

8 Fonctions usuelles.

Dans cette partie, on procède à la construction de plusieurs fonctions usuelles. On en donne des propriétés. On classe ces fonctions en quatre familles : fonction exponentielle et logarithmes, fonctions puissance, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques.

8.1 Fonction exponentielle complexe.

Dans ce paragraphe, on donne la définition de la fonction exponentielle complexe ainsi que certaines propriétés de cette fonction. La justification complète de la construction et des propriétés est renvoyée au paragraphe 9.4.

Définition 8.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on* **admet** *que la suite complexe*

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$