

1) Cours distributions.

Révis. 24.

Espace $\mathcal{D}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).

Def. : Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, le support de f est le complémentaire du plus grand ouvert où f s'annule. On le note $\text{supp } f$. C'est un fermé.

Rq. : $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ adhérence.
(exercice).

Def. : L'espace des funt. C^∞ de $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ à support compact est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$). Si K est un compact de Ω ($K \subset \subset \Omega$), on note par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ le s.e.v. de $\mathcal{D}(\Omega)$ constitué des funt. à support dans K .

Def. : On dira qu'une suite $(f_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe K compact de Ω , il existe $N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \text{supp } f_n \subset K$

et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \partial_x^\alpha f_n \rightarrow \partial_x^\alpha f$ unif. sur K

$$\text{i.e.} \quad \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f_n - \partial_x^\alpha f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Notation : Pour $f \in C^\infty(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}^d$, $K \subset \subset \Omega$

$$\|f\|_{K, \infty} = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

$$\text{et } S_{K, p}(f) := \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial_x^\alpha f\|_{K, \infty}$$

Lemme d'Urysohn!

$\int D'f$: Une appl. liné. $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$
est une distribution si

$$\forall K \subset\subset \Omega, \exists C_K > 0, \exists m_K \in \mathbb{N}; \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega);$$

$$|T(\varphi)| \leq C_K S_{K, m_K}(\varphi).$$

On note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Exemples :

* Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Cela signifie
que, pour tout $K \subset\subset \Omega$, $\int_K |f| dx < \infty$.

$$\text{Soit } T_f: \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto \int \varphi f dx.$$

T_f est bien définie (on intègre sur $\mathbb{R}^d$ en prenant $\text{supp}(\varphi)$)
et est linéaire. De plus, $K \subset\subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|T_f \varphi| \leq \int |\varphi| |f| dx \leq \|\varphi\|_{K,0} \underbrace{\int_K |f| dx}_{\leq C_K < \infty}$$

$$\leq C_K S_{K,0}(\varphi).$$

Comme T_0 , la distri. associée à la fct. nulle,
est la distribution nulle, $f \neq g$ de $L^1_{loc} \Rightarrow T_f \neq T_g$.

* Soit $a \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

$$\text{Soit } \delta_a^{(\alpha)}: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto (-1)^{|\alpha|} \delta f(a)$$

$$(\delta_a^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'(\Omega))$$

Si $\alpha=1$, α est un entier.

3)

Ordre d'une distri.

Def. : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. L'ordre de T est le plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ tq.

$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \exists C_K > 0; |T(\varphi)| \leq C_K S_{K,m}$,
s'il en existe. Sinon l'ordre est infini.

Ex. : $\delta_a = \delta_a^{(0)}$ est d'ordre 0.

$\delta_a^{(k)}$ est d'ordre $|k|$.

$T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et est d'ordre ∞ .

(exercice).

Soit $m \in \mathbb{N}$. On va voir que les distri. d'ordre m sont essentiellement les formes liné. conti. sur

$$C_c^m(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, C^m \text{ et } \text{supp } f \subset \subset \Omega\}.$$

$L: C_c^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est conti. si

$\forall K \subset \subset \Omega, \exists C_K > 0; \forall \varphi \in C_c^m(\Omega), |L(\varphi)| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K, \infty}$

$\{f \in C_c^m(\Omega); \text{supp } f \subset K\}$.

L'ens. de telles formes liné. est noté $C_c^m(\Omega)'$.

L'appl. liné. $A_m: C_c^m(\Omega)' \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$L \mapsto (\varphi \mapsto L(\varphi))$

est injective et $A_m(C_c^m(\Omega)') = \{\text{distri. d'ordre } \leq m\} =: \mathcal{D}'^m(\Omega)$

admis

4) Topologie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On se contente ici de définir la convergence d'une suite (ou série) de distributions.

Def. : Soit $(T_j)_j$ une suite d'élé. de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
On dit que $T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_j(\varphi) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T(\varphi) \text{ (dans } \mathbb{C} \text{)}.$

Exemple : $\Omega = \mathbb{R}$. $T_j = -j(\delta_{1/j} - \delta_0)$.

$T_j \rightarrow \delta_0^{(1)}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$T_j(\varphi) = -j(\varphi(\frac{1}{j}) - \varphi(0)) = \frac{\varphi(\frac{1}{j}) - \varphi(0)}{\frac{1}{j}} \rightarrow -\varphi'(0) = \delta_0^{(1)}(\varphi)$$

not.

Produit par une fonct. C^∞ .

Rappel: Leibnitz

Prop. : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$. (l'app. liné.)

$$fT : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto T(f\varphi)$$

est bien déf. et appartient à $\mathcal{D}'(\Omega)$. (c'est par déf. le produit de la distr. T par la fonct. C^∞).

Première : Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. f est bien déf. et est liné. Soit $K \subset \subset \Omega$. Par hyp. $\exists K \supset \supset \text{supp } \varphi$,
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C_K S_{K,m_K}(\varphi) = C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K,m_K}$

Comme $f \in C^\infty$, $S_{K,m_K}(f) < \infty$. De plus, par Leibnitz,

$$\partial^\alpha (f\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} \varphi.$$

$$\|\partial^\alpha (f\varphi)\| \leq \left(\sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \right) S_{K,m_K}(f) S_{K,m_K}(\varphi) = 2 S_{K,m_K}(f) S_{K,m_K}(\varphi).$$

$\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$
not. (a.u.)

5] Dne $|\int T(\varphi)| = |T(f\varphi)| \leq C_K S_{K, m_K}(f\varphi) \leq C_K^2 S_{K, m_K}(\varphi) \cdot S_{K, m_K}(\varphi).$

Dne $fT \in \mathcal{D}'(\Omega).$ $\square$

Rq: $\Omega = \mathbb{R}$, $T = \delta_0$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$

$$fT = 0 !!$$

si $S = \delta_0^{(1)}$, $fS \neq 0$: $(fS)(\varphi) = S(f\varphi) = - (f\varphi)'(0).$

or: $(f\varphi)' = f_0'\varphi + f_0\varphi'$ donc $(fS)(\varphi) = -\varphi(0) - f_0(0)\varphi'(0) = -\varphi(0).$

D'm $fS = -\delta_0.$

Pour $T \in \mathcal{D}'$: $fT = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}; T = \lambda \delta_0 \rightarrow$ exercice $\neq$

Prop: Si $C_c^\infty(\Omega) \ni f_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ unif. sur tout compact de Ω

Δ : $\mathcal{D}'(\Omega) \ni T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

alors $f_j T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega).$

Preuve admise.

Restriction: Soit $\omega \subset \Omega$ deux ouv. de $\mathbb{R}^d$.

Déf: Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T|_\omega: \mathcal{D}(\omega) \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi \mapsto T(\varphi)$

est une distri. sur ω , c'est la restriction de T à ω .

Ex: $\delta_0|_{]0, +\infty[} = 0.$

Support d'une distribution:

Déf: Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de T est le fermé $\text{supp } T$ de Ω t.q. $\Omega \setminus \text{supp } T = \bigcup_{\substack{\omega \text{ ouv.} \\ \omega \subset \Omega \\ T|_\omega = 0}} \omega.$ $\leftarrow$ ouv. de $\Omega!$

6) Prop : Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T|_{\Omega \setminus \text{supp } T} = 0$.

Preuve : admise. (partition de l'unité)

Exemples : * $\text{Supp } \delta_a^{(k)} = \{a\}$.

* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. $\text{Supp } T_f = \text{Supp } f$.

$\omega \text{ ouv. } \subset \Omega$.

Si $f|_{\omega} = 0$ alors $T_f|_{\omega} = 0$. Donc $\mathbb{R} \setminus \text{Supp } f \subset \mathbb{R} \setminus \text{Supp } T_f$.

Si $T_f|_{\omega} = 0$ alors la mes. $f dx$ est nulle sur ω .

Donc $f = 0$ p.p. ds ω . D'où $f|_{\omega} = 0$ ds L^1_{loc} .

Prop : Pour $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\text{Supp } fT \subset \text{Supp } f \cap \text{Supp } T$$

$$\Rightarrow \Omega \setminus \text{Supp } fT \supset (\Omega \setminus \text{Supp } f) \cup (\Omega \setminus \text{Supp } T).$$

Preuve : admise. (partition de l'unité).

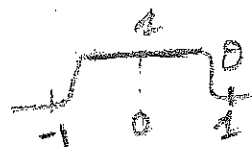
Ex : * $f: x \mapsto x$, $T = \delta_0$, on a vu que $\delta_0 T = 0$

donc $\text{Supp } \delta_0 T = \emptyset$ mais $\text{Supp } f \cap \text{Supp } T = \{0\}$.

* $\varphi|_{\text{Supp } T} = 0 \not\Rightarrow T(\varphi) = 0$.

$T = \delta_0^{(1)}$

et $\varphi(x) = x\theta(x)$ avec



$\text{Supp } T = \{0\}$ $\varphi(0) = 0$ mais

$$T(\varphi) = -(\theta(x) + x\theta'(x))|_{x=0} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Prop : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq. il est nulle au vois. de $\text{Supp } T$. Alors $T(\varphi) = 0$.

Preuve : Il existe $\omega, \omega' \text{ ouv.}$ tq. $\text{Supp } T \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega'$ et $\varphi|_{\omega} = 0$.
 Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq. $\chi = 1$ sur ω et $\text{Supp } \chi \subset \omega'$.

3).

$$T\varphi = T((1-z)\varphi) + T(z\varphi).$$

$(1-z)\varphi$ est à supp. ds $\Omega \setminus \text{supp } T$.

$$\text{donc } T((1-z)\varphi) = 0.$$

$$z\varphi = 0. \text{ Donc } T(z\varphi) = 0. \text{ D'où } T(\varphi) = 0. \square.$$

Prop.: Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, soit $m \in \mathbb{N}$.

$$1. \text{ si } T \in \mathcal{D}'_m(\Omega) \text{ et si } \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha \varphi|_{\text{supp } T} = 0$$

$$\text{alors } T(\varphi) = 0$$

$$2. \text{ si } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha \varphi|_{\text{supp } T} = 0 \text{ alors } T(\varphi) = 0.$$

Preuve: admette avec.

Distributions à supp. compact.

Prop.: Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $\text{supp } T \subset \subset \Omega$.

Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ t.q. $z_i = 1$ au vois. de $\text{supp } T$, $i \in \{1, 2\}$.

$$\text{Alors. } z_1 T = z_2 T.$$

Preuve: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a:

$$z_1 T(\varphi) - z_2 T(\varphi) = T((z_1 - z_2)\varphi) = 0.$$

$(z_1 - z_2)\varphi$ nulle au vois. de $\text{supp } T$ $\square$

Prop.: Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $\text{supp } T \subset \subset \Omega$. Soit

$$\tilde{T} : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi \mapsto T(z\varphi) \quad \text{où } z \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.q. } z=1 \text{ au vois. de } \text{supp } T.$$

$\tilde{T}$ est bien déf. et ne dépend pas du choix de z .

8

De plus

$$\forall K \subset \subset \Omega, \exists C_K > 0, \exists m_K \in \mathbb{N}; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), |\tilde{T}(\varphi)| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K, \infty}.$$

Par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tilde{T}(\varphi) = T(\varphi)$.

Preuve: Par $\varphi \in C^\infty, z\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $\tilde{T}$ est bien déf.

Par la prop. préc., $\tilde{T}$ ne dépend pas du choix de z .

Soit $K \subset \subset \Omega$. Il existe $C'_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), |T(\varphi)| \leq C'_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K, \infty}.$$

Par $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\partial^\alpha (z\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} C^\beta_\alpha \partial^\beta z \partial^{\alpha-\beta} \varphi$$

$$\|\partial^\alpha (z\varphi)\|_{K, \infty} \leq \left(\sum_{\beta \leq \alpha} C^\beta_\alpha \right) \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha z\|_{\infty} \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K, \infty}.$$

$$D'_{\tilde{T}} |\tilde{T}(\varphi)| = |T(z\varphi)| \leq C_K \times \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{K, \infty}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\tilde{T}(\varphi) = T(z\varphi) = T(\varphi) - \underbrace{T((1-z)\varphi)}_{\substack{\text{null au rdt.} \\ \text{de supp } T}} = T(\varphi). \quad \square$$

Dérivation:

Motivation: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
 $\varphi \in \text{Supp } \varphi \subset [a; b]$.

$$\text{On a } \int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx = \int_a^b f' \varphi = \underbrace{[f\varphi]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b f \varphi' dx$$

$$= - \int_a^b f \varphi' dx = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = -T_f(\varphi').$$

Donc $T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi')$.
 Il est naturel de choisir $\varphi \mapsto -T_f(\varphi')$

9

Cela marche encore en dim. d :

Si $f \in C^2(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ soit $a \in \mathbb{N}^d$ avec $|a|=1$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_f^a \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} f \partial_f^a \varphi \, dx \quad (\text{IPP sans terme au bord}).$$

$$\text{Soit } T_{\partial_f^a}(\varphi) = -T_f(\partial_f^a \varphi).$$

Prop. défini : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. L'appl.

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

appartient à $\mathcal{D}'(\Omega)$. C'est la dérivée partielle par rapport à x_i de T .

Preuve : $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est bien déf. car $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est linéaire.

Soit $K \subset \subset \Omega$. Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe $C_K > 0, m_K \in \mathbb{N}$ et φ_K tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), |T(\varphi)| \leq C_K \sup_{|a| \leq m_K} \|\partial_f^a \varphi\|_{\infty, K}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ donc

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) \right| = \left| T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \right| \leq C_K \sup_{|a| \leq m_K} \left\| \partial_f^a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right\|_{\infty, K}$$

$$\leq C_K \sup_{|a| \leq m_K + 1} \|\partial_f^a \varphi\|_{\infty, K} \quad \square.$$

Prop. : Toute distribution est infiniment partiellement dérivable.

Preuve : par réc. sur l'ordre de dérivation et par la prop. précédente. $\square$

10

Notation : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} = , \quad \partial^0 T = T.$$

Or a : $\partial^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$, $R_q : \text{supp } \partial^\alpha T \subset \text{cpt}$.
(exercice).

Exemples : $\delta_a^{(\alpha)} = \partial^\alpha (\delta_a^{(0)})$ $\delta_a^{(0)} = \delta_a$.

$\mathbb{R}^* \ni x \mapsto \ln|x| \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$.
($\hookrightarrow \int_0^1 |\ln t| dt < \infty$.)

Quelle est la dérivée de T_f ?

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx$$

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \varphi'(x) dx}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx}_{J_\varepsilon} \right]$$

$$I_\varepsilon = \int_a^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx = \left[\ln(-x) \varphi(x) \right]_a^{-\varepsilon} - \int_a^{-\varepsilon} \frac{-1}{-x} \varphi(x) dx$$

(avec $\varphi(a)=0$)

$$= \ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_a^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

$$J_\varepsilon = -\ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon; \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad T_f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon; \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011/2012

LISTE DE CONTRÔLE DE SAISIE

La population a été filtrée en fonction des paramètres décrits ci-dessous

Version d'étape (IP):

5E27A1

101

Lic MATHS PHYSIQUE INFO 1

11. On note $(T_f)'$ par $VP \frac{1}{x}$.
(valeur principale de $\frac{1}{x}$).

$$R_g : * VP \frac{1}{x} | R^* = T_{1/2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{à } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est} \\ \text{loca. int.} \end{array} \right)$$

$$L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+).$$

$$* f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x, \quad f_0 \cdot VP \frac{1}{x} = T_1 \leftarrow \text{fact. 1.}$$

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En effet: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\left(f_0 \cdot VP \frac{1}{x} \right) (\varphi) = VP \frac{1}{x} (f_0 \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon; \varepsilon]} \frac{x \varphi(x)}{x} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon; \varepsilon]} \varphi(x) dx = \int \varphi(x) dx = T_1(\varphi).$$

* si T est d'ordre m alors ∂_T^α est d'ordre $\leq m + |\alpha|$.

* soit $f \in C^2(\Omega)$. On a bien $T_{\partial f} = \partial^\alpha (T_f)$.
pour $|\alpha| = 1$.

preuve: $\frac{\partial T_f}{\partial x_i}(\varphi) = -T_f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$

12). Par IPP (var. x_i)

$$= + \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(x) dx \quad (\text{car } f \in C^1)$$

$$= T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\varphi), \quad \text{arrêth.}$$

Prop. : Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\mathcal{D}^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$T \mapsto \mathcal{D}^\alpha T$$

est l.h. au sens linéaire :

Si $T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors

$$\mathcal{D}^\alpha T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{D}^\alpha T \text{ ds } \mathcal{D}'(\Omega)$$

c'est-à-dire : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\mathcal{D}^\alpha T_j(\varphi) \rightarrow \mathcal{D}^\alpha T(\varphi). \quad (\text{ds } \mathbb{C}).$$

Preuve : $\mathcal{D}^\alpha T_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \frac{T_j(\partial^\alpha \varphi)}{j \rightarrow \infty \text{ per hyp.}}$

$$T(\partial^\alpha \varphi)$$

$$(-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi) = \mathcal{D}^\alpha T(\varphi) \quad \square.$$

Prop. : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et w sur Ω ,
On a : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$(\mathcal{D}^\alpha T)|_w = \mathcal{D}^\alpha (T|_w),$$

Preuve : Pour $\varphi \in \mathcal{D}(w)$, $\mathcal{D}^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$
 $= (-1)^{|\alpha|} T|_w(\partial^\alpha \varphi)$ car $\partial^\alpha \varphi \in w$.
 $= \mathcal{D}^\alpha (T|_w)(\varphi). \quad \square.$

13] Formule de Leibnitz

Prop. Pour $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a $d \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta T.$$

Preuve: admise.

Idée de la preuve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (fT)(\varphi) &= - (fT) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\ &= -T \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = -T \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (f\varphi) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right) \\ &= \frac{\partial T}{\partial x_i} (f\varphi) + T \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right) \\ &= \left(f \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) (\varphi) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} T \right) (\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

Prop.: $\text{supp } \frac{\partial T}{\partial x_i} \subset \text{supp } T.$

Preuve: exercice.

Prop.: Soit $f \in C^0(\Omega)$ t.q. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = Tg$
avec $g \in C^0(\Omega)$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe
partout et $g = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Preuve: admise.

141

Cas de la dim. 1.Soit $f \in L^1_{loc}([a; \beta])$ et $x_0 \in]a; \beta[$. $x \mapsto g(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ est bien déf. sur $]a; \beta[$ et est continue. On peut considérer T_g .Prop : $(T_g)' = f$.Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{D}([a; \beta])$.

$$T_g'(\varphi) = -T_g(\varphi') = -\int_a^\beta g(t) \varphi'(t) dt$$

$$= -\int_a^{x_0} \varphi'(t) \left(-\int_t^{x_0} f(s) ds \right) dt - \int_{x_0}^\beta \varphi'(t) \left(\int_{x_0}^t f(s) ds \right) dt$$

$$\text{Fubini} = \int_a^{x_0} f(s) \left(\int_a^s \varphi'(t) dt \right) ds - \int_{x_0}^\beta f(s) \left(\int_s^\beta \varphi'(t) dt \right) ds$$

$$= \int_a^{x_0} f(s) (\varphi(s) - \varphi(a)) ds - \int_{x_0}^\beta f(s) (\varphi(\beta) - \varphi(s)) ds$$

$$= \int_a^\beta f(s) \varphi(s) ds = T_f(\varphi), \quad \square.$$

Formule des sauts.Th. : Soit $f :]a; \beta[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.Il existe donc $a < x_1 < \dots < x_p < \beta$ ts. $f|_{]x_i; x_{i+1}[}$ est conti.et $f(x_i + 0) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f$ et $f(x_i - 0) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f$ existent

15

dans $\mathcal{C}$. On suppose de plus
que $f' \in L^1_{\text{loc}}(\alpha; \beta[)$.

Alors
$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^P (f(x_i+0) - f(x_i-0)) \delta_{x_i}.$$

Exemple : soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|$, f est conti.

$\text{sgn} = f': \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

$f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Par le résultat,

$$(T_f)' = T_{\text{sgn}} + 0$$
 $\times$ pas de saut.

$\text{sgn}' = 0$ ds L^1_{loc} et sgn est conti. par morceaux

Donc
$$(T_{\text{sgn}})' = \underbrace{T_0}_{=0} + (1 - (-1))\delta_0 = 2\delta_0.$$

Preuve du Th. :

dans le cas où il n'y a qu'un pt. de
discontinuité : x_1 . On suppose de plus
que f' est conti. sur $[\alpha; x_1[$ et $]x_1; \beta[$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\alpha; \beta[)$.
$$(T_f)'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{\alpha}^{\beta} f \varphi' dt.$$

16]. Dma

$$(T_f)'(\varphi) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\alpha}^{x_1 - \varepsilon} f \varphi' dt + \int_{x_2 + \varepsilon}^{\beta} f \varphi' dt \right),$$

(car f est bornée).

IPP

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([f\varphi]_{\alpha}^{x_1 - \varepsilon} - \int_{\alpha}^{x_1 - \varepsilon} f' \varphi dt + [f\varphi]_{x_2 + \varepsilon}^{\beta} - \int_{x_2 + \varepsilon}^{\beta} f' \varphi dt \right)$$

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f(x_1 - \varepsilon)\varphi(x_1 - \varepsilon) - f(x_2 + \varepsilon)\varphi(x_2 + \varepsilon) - \int_{\alpha}^{x_1 - \varepsilon} f' \varphi dt - \int_{x_2 + \varepsilon}^{\beta} f' \varphi dt \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((f(x_2 + \varepsilon) - f(x_1 - \varepsilon))\varphi(x_2 + \varepsilon) + f(x_1 - \varepsilon)(\varphi(x_2 + \varepsilon) - \varphi(x_1 - \varepsilon)) \right) + \int_{\alpha}^{\beta} f' \varphi dt$$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$ car φ est c.t.i.
 $\leftarrow$ car $f' \in L^1_{loc}$.

$$= (f(x_2 + 0) - f(x_1 - 0)) \underbrace{\varphi(x_2)}_{\varepsilon_2(\varphi)} + 0 + \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} f' \varphi dt}_{T_{f'}(\varphi)}.$$



17

Exemples de solutions fondamentales

Déf. : Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$.
 Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une sol. fonda. de P
 si $P(T) = \delta_0$.

Exemples :

* $d=1$. Soit $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$

Par la formule des sauts, $(T_H)' = \delta_0$.

Donc T_H est une sol. fondamentale de l'opé.

$\frac{d}{dx}$, $T_{\frac{1}{2}\text{sgn}}$ en est une autre.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{|x|}{2}$. On a vu que $T_f' = T_{\frac{1}{2}\text{sgn}}$

dnc $(T_f)'' = \delta_0$. Donc T_f est une sol.

fondamentale de $\frac{d^2}{dx^2}$.

* $d=2$. Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(|x|)$.

$$f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \quad \left(\int_{D(0;R)} \ln^2(|x|) dx = \int_0^R \left(\int_{S^1} \ln^2(r) r d\theta \right) dr \right. \\ \left. = C \int_0^R r \ln^2(r) dr < \infty \right)$$

On montre qu'il existe $b > 0$ t.q. T_{bf} est une sol. fonda. de

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

18) Pour $\varepsilon > 0$, soit $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto \frac{1}{2} \ln(|z|^2 + \varepsilon^2)$.

$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $\partial_\alpha \left(\frac{1}{f_\varepsilon} \right) = T_{f_\varepsilon} \partial_\alpha f_\varepsilon$.

Soit $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$. $T_{f_{\varepsilon_n}} \longrightarrow T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

$$T_{f_{\varepsilon_n}}(\varphi) = \int f_{\varepsilon_n}(x) \varphi(x) dx = \int \frac{1}{2} \ln(|x|^2 + \varepsilon_n^2) \varphi(x) dx$$

Cv. dom. $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$$\int \frac{1}{2} \ln(|x|^2) \varphi(x) dx = T_f(\varphi).$$

Par conti. de la dérivation, $\Delta T_{f_{\varepsilon_n}} \longrightarrow \Delta T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Or, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$(\Delta T_{f_{\varepsilon_n}})(\varphi) = T_{\Delta f_{\varepsilon_n}}(\varphi) = \int \frac{2\varepsilon_n^2}{(|x|^2 + \varepsilon_n^2)^2} \varphi(x) dx \stackrel{z = \varepsilon_n y}{=} \int \frac{\varphi(\varepsilon_n y)}{(|y|^2 + 1)^2} dy$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(0) \int \frac{dy}{(\mathbb{R}^2 (|y|^2 + 1)^2)} = \frac{1}{5}$$

D'm $\Delta T_f = \frac{1}{6} \delta_0$ et $\Delta T_{f_g} = \delta_0$.

* $d=3$. On vérifie le m. que, pour $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $z \mapsto \frac{1}{|z|}$

il existe $b < 0$ t.q. $T_{b f_g}$ est une sol. funda. de

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

19]. Produit tensoriel.

Soit Ω_1 ouv. de $\mathbb{R}^{d_1}$ et Ω_2 ouv. de $\mathbb{R}^{d_2}$.

Soit $f_1 \in L^2_{loc}(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^2_{loc}(\Omega_2)$.

On déf.

$$f_1 \otimes f_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x; y) \longmapsto f_1(x) f_2(y).$$

$$f_1 \otimes f_2 \in L^2_{loc}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$T_{f_1 \otimes f_2}(\varphi) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_1(x) f_2(y) \varphi(x; y) dx dy$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega_1} f_1(x) \left(\int_{\Omega_2} f_2(y) \varphi(x; y) dy \right) dx$$

$$= T_{f_1} \left(x \longmapsto T_{f_2}(\varphi(x; \cdot)) \right).$$

$$= T_{f_2} \left(y \longmapsto T_{f_1}(\varphi(\cdot; y)) \right).$$

Il est naturel de poser, pour $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$,

$$T_1 \otimes T_2 (\varphi) = T_1 \left(x \longmapsto T_2(\varphi(x; \cdot)) \right).$$

de sorte qu'on ait $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1 \otimes f_2}$.

Pb. : Est-ce que $x \longmapsto T_2(\varphi(x; \cdot))$ appartient à $\mathcal{D}'(\Omega_1)$?

20.

Prop.: Soit $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Alors $\varphi: \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_2)$.

$$x \longmapsto T_2(\varphi(x, \cdot))$$

et $\text{supp } \varphi \subset \{x \in \Omega_1; \exists y \in \Omega_2, (x, y) \in \text{supp } \varphi\}$.

Preuve: admise.

Prop.: Pour $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$,

l'appl. $T: \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \longmapsto T_1(T_2(\varphi))$$

est une distri. sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Si T_1 est d'ordre $\leq m_1$ et T_2 d'ordre $\leq m_2$ alors

$T_1 \otimes T_2$ est d'ordre $\leq m_1 + m_2$.

Preuve: exercice.

Th. de densité': L'esp. vect. engendré par $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Preuve: admise. $\longrightarrow \{\varphi_1 \otimes \varphi_2, \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1), \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)\}$.

Th. de Fubini: Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ et

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

$$(T_1 \otimes T_2)(\varphi) = T_1(T_2(\varphi)) = T_2(T_1(\varphi)).$$

Preuve: admise.

21.

Th. : Soit $f_1 \in L^1_{loc}(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^1_{loc}(\Omega_2)$.

Alors $f_1 \otimes f_2 \in L^1_{loc}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et

$$T_{f_1 \otimes f_2} = T_{f_1} \otimes T_{f_2}.$$

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On a

$$T_{f_1} \otimes T_{f_2}(\varphi) = T_{f_2}(T_{f_1}(\varphi)) = \int_{\Omega_1} f_1(x) \left(\int_{\Omega_2} f_2(y) \varphi(x,y) dy \right) dx.$$

$$\stackrel{\text{Fubini used}}{=} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \underbrace{f_1(x) f_2(y)}_{f_1 \otimes f_2(x,y)} \varphi(x,y) dx dy$$

$$= T_{f_1 \otimes f_2}(\varphi). \quad \square.$$

Prop. : Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$.

$$\text{Supp}(T_1 \otimes T_2) = \text{Supp } T_1 \times \text{Supp } T_2.$$

$$\partial^\alpha (T_1 \otimes T_2) = (\partial^{\kappa_1} T_1) \otimes (\partial^{\kappa_2} T_2).$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^{n_1+n_2} = (\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^{n_2}.$$

Pour $f_1 \in C^\infty(\Omega_1)$ et $f_2 \in C^\infty(\Omega_2)$,

$$(f_1 T_1) \otimes (f_2 T_2) = (f_1 \otimes f_2) (T_1 \otimes T_2),$$

Preuve : admette.

221.

Th.: Si $T_{1;j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T_1$ ds $\mathcal{D}'(\Omega_1)$

et $T_{2;j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T_2$ ds $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ alors

$T_{1;j} \otimes T_{2;j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T_1 \otimes T_2$ ds $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Preuve : admise.

Produit de convolution :

Motivation : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } g \subset \subset \mathbb{R}^d$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$ on int. sur $\text{supp } g$

$\xrightarrow{\text{arrêt L.}}$ $= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$ on int. sur $\{y; x-y \in \text{supp } g\}$

Ensuite, pour $K \subset \subset \mathbb{R}^d$,

$$\int_K |f * g(x)| dx \leq \int_{K \times \text{supp } g} |f(x-y)| |g(y)| dx dy$$

ch. de var.
 $u = x-y$
 $v = y$

$$\leq \int_{K' \times \text{supp } g} |f(u)| |g(v)| 1 du dv$$

$$\leq \left(\int_{K'} |f(u)| du \right) \left(\int_{\text{supp } g} |g(v)| dv \right),$$

$$f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

23]. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$T_{f \otimes g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f \otimes g(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right) dx$$

Fubini

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \varphi(x) f(x-y) g(y) dx dy$$

$$\begin{aligned} u &= x-y \\ v &= y \end{aligned}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \varphi(u+v) f(u) g(v) du dv \stackrel{?}{=} T_{f \otimes g}(\varphi(u+v))$$

$(\mathbb{R}^d)^2 \ni (u,v) \mapsto \varphi(u+v)$ est C^∞ mais pas à support compact (sauf si $\varphi=0$).

Mais, dans l'intégrale, on intègre sur le compact:

$$K = \{ (u,v) \in (\mathbb{R}^d)^2; v \in \text{supp } g \text{ et } u+v \in \text{supp } \varphi \}.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ t.q. $\chi=1$ sur K . Alors

$$T_{f \otimes g}(\varphi) = \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \underbrace{\chi(u,v) \varphi(u+v) f(u) g(v)}_{\hookrightarrow \varphi(u,v); C^\infty \text{ à supp. compact!!}} du dv.$$

$$= T_{f \otimes g}(\varphi) = (T_f \otimes T_g)(\varphi).$$

On a utilisé de manière essentielle que $\text{supp } g$ est compact!

Idée: Pour $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on veut poser
 $S * T(\varphi) = S \otimes T(\varphi).$

24) mais on s'attend à avoir besoin d'une cond.
de supp. sur S et T .

Def.: Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. S et T
sont à supports convolutifs si

$$\forall R > 0, \exists M > 0; \begin{cases} x \in \text{Supp } S \\ y \in \text{Supp } T \\ |x+y| \leq R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq M \\ \text{et} \\ |y| \leq M \end{cases}$$

Exemples: * $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{Supp } T \subset \subset \mathbb{R}^d$.

$$\left(\begin{array}{l} y \in \text{Supp } T \\ |x+y| \leq R \end{array} \Rightarrow \begin{cases} |y| \leq C_T \Rightarrow |y| \leq C \\ |x| \leq R+|y| \Rightarrow |x| \leq R+C \end{cases} \right)$$

$$* \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \exists c \in \mathbb{R}; \text{Supp } T \subset [c; +\infty[\}$$

Tous S et T de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ sont à supp. conv.

$$\begin{cases} x \in \text{Supp } S \\ y \in \text{Supp } T \\ |x+y| \leq R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' \leq x \\ c \leq y \\ x+y \leq R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' \leq x \text{ et } -x \leq -c' \\ c \leq y \text{ et } -y \leq -c \\ x \leq R-y \leq R-c \\ y \leq R-x \leq R-c' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c' \leq x \leq R-c \\ c \leq y \leq R-c' \end{cases}$$

Prop. 10: Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à supp. conv. Soit
 $K \subset \subset \mathbb{R}^d$. Alors

$$\tilde{K} := \{ (x, y) \in \text{Supp } S \times \text{Supp } T; x+y \in K \} \subset \subset \mathbb{R}^{2d}.$$

25 Soit $z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ t.q. $z=1$ au vois. de K

Alors l'appl. $(S*T)_K : \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \mapsto (S \otimes T_y)(z\varphi)$$

$$\text{ou } \varphi : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto \varphi(x+y),$$

est bien déf., liné., ne dépend pas du choix de z , et vérifie :

$$\exists C_K > 0, \exists m_K \in \mathbb{N}; \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d), \quad (*)$$

$$|(S*T)_K(\varphi)| \leq C_K \sup_{|k| \leq m_K} \|\partial^k \varphi\|_{\infty, K}$$

Preuve : admise. (voir annexe).

Th : Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à supp-conv.

L'appl. : $S*T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \mapsto (S*T)_K(\varphi)$$

ou K est un compact
contenant $\text{supp } \varphi$

est bien déf., liné., et $S*T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Preuve : Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $K \subset \subset \mathbb{R}^d$ t.q. $\text{supp } \varphi \subset K$
on a $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ donc $(S*T)_K(\varphi)$ est bien déf.

(q. prop. préc.). Si $K' \subset \subset \mathbb{R}^d$ t.q. $\text{supp } \varphi \subset K'$,
on vérifie que $(S*T)_{K'}(\varphi) = (S*T)_K(\varphi)$.

26 D'après la prop. précé., $(S * T)_k$ et $(S * T)_{k'}$ sont déf. au moyen de fct. $z, z' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ t.q. $z = 1$ sur $\tilde{K}$
 $z' = 1$ sur $\tilde{K}'$.
 Soit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ t.q. $\gamma = 1$ sur $\tilde{K} \cup \tilde{K}'$.
 On a
 $(S * T)_k(\varphi) = (S \otimes T)(z\varphi) \stackrel{\text{par prop. précé.}}{=} (S \otimes T)(\gamma\varphi)$
 $(S * T)_{k'}(\varphi) = (S \otimes T)(z'\varphi) = (S \otimes T)(\gamma\varphi) =$
 $(S * T)_k(\varphi) = (S * T)_{k'}(\varphi)$.
 $S * T$ est donc bien déf. et liné. Par la prop. précé., $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. $\square$ arrêt.

Propriétés de la convolution.

Prop. : Soit $(S, T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \text{supp. env.}$.
 Soit $(\beta, \gamma) \in (\mathbb{N}^d)^2$ et $\alpha = \beta + \gamma \in \mathbb{N}^d$.
 $(\alpha = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_d + \gamma_d))$. On a
 $\partial^\alpha (S * T) = \partial^\beta S * \partial^\gamma T$.

Première : admise -

Prop. : Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors S et δ_0 sont à supp. env. et $S * \delta_0 = S$.

27].

Preuve: Comme δ_0 est à supp. compact,

S et δ_0 sont à supp. conv.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned}(S * \delta_0)(\varphi) &= (S_x \otimes \delta_0^y)(\varphi(x+y)) \\ &= S_x(x \mapsto \varphi(x+0)) = S(\varphi). \square\end{aligned}$$

Applications:

* Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ à supp. compact. On cherche $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

t.q. $\Delta T = S$. On a vu qu'il existe $b \in \mathbb{R}^*$

t.q. T_{bf} est une sol. funda. de Δ , on déf. $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{|x|}$.

Donc $\Delta T_{bf} = \delta_0$. Soit $T = S * T_{bf}$.

On a $\Delta T = S * \Delta T_{bf} = S * \delta_0 = S$.

* Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On cherche $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

t.q. $T' = S$. On sait $(T_{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}})' = \delta_0$.

Pb. S et $T_{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}}$ ne sont pas forcément à supp.

conv. Astuce: Soit $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Par la formule des sauts, $(T_{f_1})' = \delta_0$.

Soit $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On a aussi $(T_{f_2})' = \delta_0$.

28).

Si $S = S_+ + S_-$ avec $S_+ \in \mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \exists c \in \mathbb{R}; \text{supp } T \subset [c; +\infty[$
 $S_- \in \mathcal{D}'_- = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \exists c \in \mathbb{R}; \text{supp } T \subset]-\infty; c]\}$

alors on choisit $T = S_+ * \underbrace{T_{\delta_2}}_{\in \mathcal{D}'_+} + S_- * \underbrace{T_{\delta_1}}_{\in \mathcal{D}'_-}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } T' &= S_+ * (T_{\delta_2})' + S_- * (T_{\delta_1})' \\ &= S_+ * \delta_0 + S_- * \delta_0 = S_+ + S_- = S, \end{aligned}$$

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq. $\chi = 1$ sur $[1; +\infty[$,
 $\chi = 0$ sur $] -\infty; 0]$.

$$\text{On a } S = \underbrace{\chi S}_{= S_+ \in \mathcal{D}'_+} + \underbrace{(1-\chi)S}_{= S_- \in \mathcal{D}'_-}.$$

Conséquence : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
 tq. $T_{\varphi_n} \rightarrow T$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. (à démontrer)

Idee de la preuve : $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \int \frac{\alpha}{0 < |x| < 1} dx$

$$\alpha_k(x) = \alpha\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\alpha_k T \rightarrow T \text{ ds } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

(à démontrer)

D.p.s. T est à supp. compact, soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\text{supp } \alpha \subset B(0,1)$
 $\alpha \int \alpha = 1$.

$$\varphi_n(x) = \alpha(n x)$$

$$T_{\varphi_n} = \varphi_n * T \rightarrow T \text{ ds } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

29

Distributions tempérées.

Def.: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (Esp. de Schwartz) est l'esp. vect. des fct. $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, C^∞ tq.
 $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d)^2, |x^\alpha| \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

On a: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $g: x \mapsto e^{-|x|^2}$ $g: x \mapsto |x|^2$.

Def.: $f_i \rightarrow f$ dans $\mathcal{S}$ si
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d, \|x^\alpha \partial^\beta (f - f_i)\|_\infty \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Prop.: Pour $f \in \mathcal{S}$, il existe $(f_n) \in \mathcal{D}^\infty$ tq. $f_n \rightarrow f$ ds $\mathcal{S}$. $\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{n} \right)$

Def.: $\mathcal{O}_M = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists m \in \mathbb{N}, \exists C > 0; \right.$
 $\left. \forall x \in \mathbb{R}^d, |f^\alpha(x)| \leq C |x|^m \right\}$
 $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, C_\alpha = (1 + |x|^2)^{m_\alpha/2})$.

C'est l'esp. vect. des fct. à croissance lente.

Prop.: Soit $g \in \mathcal{O}_M$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Les appl. liné.

$\partial^\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ et $M_g: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$
 bien déf. $f \mapsto \partial^\alpha f$ $f \mapsto fg$

sont continues au sens où, si $f_i \rightarrow f$ ds $\mathcal{S}$
 $\partial^\alpha f_i \rightarrow \partial^\alpha f$ et $f_i g \rightarrow fg$ ds $\mathcal{S}$.

Preuve: exercice.

30

Transformée de Fourier:

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$.

Th.: $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est bien déf. et conti. et biject.
 $f \mapsto \hat{f}$
 $F^{-1} = (2\pi)^{-d} \bar{F}$ où

$\bar{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ (complexe conjugué)

Preuve: admise. ($\mathcal{S} \subset L^1$)

Def.: Une distribution tempérée T (on note $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) est une appl. liné. $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. il existe $(m, m) \in \mathbb{N}^2$ et $C > 0$

t.q. $\forall f \in \mathcal{S}, |T(f)| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$.

Exemples: * Soit $g \in \mathcal{O}_M$ et $T_g: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$
 $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} fg$

$T_g \in \mathcal{S}'$. T_g ; $\langle x \rangle^m g$ est bornée.
 $|T_g(f)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\langle x \rangle^{-d-1}}_{\in L^1} \underbrace{\langle x \rangle^m g}_{\in L^\infty} \underbrace{\langle x \rangle^{d+1} f}_{\in L^1} dx$

* Pour $a \in \mathbb{R}^d$, $\delta_a: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ est une distri.
 $f \mapsto f(a)$ tempérée. arrêt.

Def.: $T_j \rightarrow T$ ds $\mathcal{S}'$ si $\forall f \in \mathcal{S}, T_j(f) \rightarrow T(f)$.

Prop.: L'appl. $\mathcal{J}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{D}'$
 $T \mapsto \left(\begin{array}{c} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\varphi) \end{array} \right)$

est bien déf. liné. conti. et injective. De plus

$\mathcal{J}(\mathcal{S}') = \{ T \in \mathcal{D}' ; \exists C, m; \forall \varphi \in \mathcal{D}, |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty \}$

Preuve: admise.

31 Prop. : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à supp. compact. Soit $z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

t.q. $z = 1$ au vois. de $\text{supp } T$. L'appl.

$\tilde{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien déf., ne dépend
 $f \mapsto T(zf)$ pas du choix de z et
 est une distribution tempérée.

Preuve (partielle) : $zf \in \mathcal{D}!$

Soit $K = \text{supp } z$. Il existe C_K, m_K t.q.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d), \quad |T(\varphi)| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}$$

Donc, pour $f \in \mathcal{S}$,

$$|\tilde{T}(f)| = |T(zf)| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha (zf)\|_{\infty, K} \stackrel{\text{Leibnitz}}{\leq} C \sup_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha f\|_{\infty}.$$

Opérations : Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Soit

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\mathcal{G}} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

$$T \mapsto \delta T \quad \quad T \mapsto \mathcal{G}T$$

$$\text{on } (\partial^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha f) \quad \text{on } (\mathcal{G}T)(f) = T(\mathcal{G}f).$$

Ces appl. sont liné. conti.

Preuve : admette.

Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$.

Prop. et déf. : Soit $T \in \mathcal{S}'$. L'appl. liné. $\hat{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi \mapsto T(\hat{\varphi})$

est une distribution tempérée. C'est la transformée de

Fourier de T . De plus $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est conti.
 $T \mapsto \hat{T}$

32) 8° $T_j \rightarrow T$ ds $\mathcal{Y}'$ dans $\hat{T}_j \rightarrow \hat{T}$ ds $\mathcal{Y}'$.

Preuve: Comme $g \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{Y}$ est conti. et $T: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ l'est aussi $\hat{T}$ est conti. de $\mathcal{Y}$ ds $\mathbb{C}$ donc $\hat{T} \in \mathcal{Y}'$.

Soit $T_j \rightarrow T$ ds $\mathcal{Y}'$. Soit $f \in \mathcal{Y}$. Donc

$$\hat{T}_j(f) = T_j(\hat{f}) \xrightarrow{j} T(\hat{f}) = \hat{T}(\hat{f}).$$

Donc $\hat{T}_j \rightarrow \hat{T}$ ds $\mathcal{Y}'$. $\square$

Prop.: $F: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ est un isomorphisme et $F^{-1} = (2\pi)^{-d} \bar{F}$.

Preuve: cela provient des prop. de $F: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Prop.: Soit $T \in \mathcal{Y}'$. $F\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} T\right) = x_j \hat{T}$.
 $F(x_j T) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{T}$.

Preuve: on vérifie les prop. dans $\mathcal{Y}$ d'abord et on utilise la def. de $\hat{T}$.

Prop.: Soit $\hat{T} \in \mathcal{Y}'$. Il existe $(\varphi_n) \in \mathcal{D}^{\infty}$ s. $T_{\varphi_n} \rightarrow \hat{T}$ ds $\mathcal{Y}'$.

Prop.: Pour $p \in [1, \infty]$, l'appl. $g: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{Y}'$
 $g \mapsto T_g$,

où $T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f g$, est liné. injective.

Preuve: admise.

33) Transformée de Fourier et convolution.

Rappel: Si $(u, v) \in L^1(\mathbb{R}^d)^2$ alors

$$u * v \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } F(u * v) = F(u) F(v).$$

Prop.: Soit $g \in \mathcal{Y}$ et $T \in \mathcal{Y}'$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}^d, \text{ on pose } g * T(x) = T(g(x - \cdot))$$

Alors il existe $h \in \mathcal{O}_M$ tq. $g * T = \overline{T_h}$ et

$$F(g * T) = \underbrace{F(g)}_{\in \mathcal{Y}} \cdot \underbrace{F(T)}_{\in \mathcal{Y}'}$$

Prop.: Soit $S \in \mathcal{D}'$ à supp. compact et $T \in \mathcal{Y}'$.

En notant encore par T la restriction de T à $\mathcal{D}$,

$S * T$ est bien déf. On a $S * T \in \mathcal{Y}'$.

De plus, $F(S) = T_h$ où $h \in \mathcal{O}_M$ et

$$F(S * T) = h * F(T).$$

(ext. de $\mathcal{D}' \times \mathcal{Y}'$)

Appl.: $F\left(\sum a_{\alpha} \partial^{\alpha} u\right) =$
 $Id \mid \mathcal{S}_M.$