L1, Analyse 2, 2023/2024.

Propriétés de l'exponentielle complexe.

On donne ici une liste d'importantes propriétés de l'exponentielle complexe, déjà utilisée au premier semestre. Elles seront supposées connues dès le début du cours d'analyse 2 et pourront être utilisées dans les TDs. Ces propriétés figurent et sont démontrées dans les paragraphes "Fonction exponentielle complexe" et "Construction de la fonction exponentielle complexe" des deux versions de mon cours de L1 sur :

" https://jecko.perso.math.cnrs.fr/enseignement.html " .

On **admet** l'existence d'une application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $\exp(z) \in \mathbb{C}$ (on note aussi $e^z := \exp(z)$) vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} \;=\; \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{1}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \;=\; \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,, \tag{2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \;\neq\; 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\exp(z)} \;=\; \exp(-z)\,, \tag{3}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p \cdot z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{4}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \;\in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{5}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \;\in \mathcal{U}\,, \tag{6}$$

$$\exp(0) \;=\; 1\,. \tag{7}$$

Le résultat suivant est essentiel pour la notion d'argument d'un nombre complexe.

Proposition 2. *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$, est surjective.*
L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ est donnée par $\varphi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi \cdot k;\, k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, on a

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big(\varphi(x_1) \;=\; \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\big)\,. \tag{8}$$

L'application φ est 2π-périodique i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x \,+\, 2\pi) \;=\; \varphi(x)\,.$$

Enfin, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi/2) = i$, $\varphi(\pi) = -1$ et $\varphi(3\pi/2) = -i$.

Il implique en effet la

Proposition 3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z| \exp(it)\}$ est infini et s'écrit $\mathcal{A}_z = \{\theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, l'ensemble $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ a exactement un élément.*

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un réel t vérifiant $z = |z| \exp(it)$ est un argument de z. L'ensemble $\mathcal{A}_z$, défini dans la proposition 3, est donc l'ensemble infini des arguments de z. L'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]-\pi;\pi]$ est appelé argument principal de z et est noté par $\mathrm{Arg}(z)$. On remarque que l'on peut écrire $\mathcal{A}_z = \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Attention : On a décidé que le nombre complexe zéro n'a pas d'argument.

Les fonctions sinus et cosinus sont les fonctions $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) \ = \ \mathrm{Im}\big(\varphi(t)\big) \ = \ \mathrm{Im}\big(e^{it}\big) \ = \ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

et

$$\cos(t) \ = \ \mathrm{Re}\big(\varphi(t)\big) \ = \ \mathrm{Re}\big(e^{it}\big) \ = \ \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,,$$

respectivement.

Proposition 4. *Les fonctions* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont dérivables et, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin'(t) \ = \ \cos(t) \quad \textit{et} \quad \cos'(t) \ = \ -\sin(t)\,.$$

D'après la proposition 1, la restriction de l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$, appelée exponentielle réelle, est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. En voici des propriétés:

Proposition 5. *La fonction exponentielle réelle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, i.e.* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. *Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même, i.e.* $\exp' = \exp$. *Elle est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa bijection réciproque* $\exp^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable, strictement croissante et on a, pour $x > 0$,*

$$\big(\exp^{\langle -1\rangle}\big)'(x) \ = \ \frac{1}{x}\,. \tag{9}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x \to -\infty} x^m \cdot \exp(x) \ = \ 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \ = \ +\infty\,. \tag{10}$$

On rappelle que, par définition, le logarithme népérien, noté $\ln(\cdot)$, est la bijection réciproque $\exp^{\langle -1\rangle}$ de la fonction exponentielle réelle.

Proposition 6. *L'exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective i.e. tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit* $\exp(c)$ *pour un $c \in \mathbb{C}$.*