Université de Cergy-Pontoise.

Contrôle continu d'approfondissements, 6 mars 2015 (1 h 30 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (5 points). Vrai ou faux. Répondre **sans justification**. $-0{,}25$ point par réponse fausse, 0,5 point par réponse juste, 0 point pour l'absence de réponse. Mais la note minimale sera 0.

1. L'intervalle $]1;7[$ est ouvert.
2. L'intervalle $[-1;2[$ est fermé.
3. L'intérieur de $\{-7\} \cup \{4\}$ est vide.
4. L'adhérence de $\{-2\} \cup \{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$ est $\{0\} \cup \{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$.
5. L'intérieur de $[-3;2[$ est $]-3;2[$.
6. L'adhérence de $\{-2\} \cup]1;3]$ est $\{-2\} \cup [1;3]$.
7. L'adhérence de $\{-2\} \cup]-3;4[\cup [7;8[$ est $[-3;4] \cup [7;8]$.
8. Le point 0 est un point d'accumulation de $\{0\} \cup \{2 - n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$.
9. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1;2]$ est croissante.
10. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1;2]$ est continue.

Exercice 2. : (6 pts). On note par $4\mathbb{N} = \{4k; k \in \mathbb{N}\}$ l'ensembles des multiples entiers et positifs de 4. Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = 2^{-n} - 2 \cdot 7^{-n}\ ,\ v_n = (-4)^n\ ,\ w_n = 1 - \frac{1}{n+1}\ ,\ \text{si}\, n \in 4\mathbb{N}\ ,\ \text{et}\, w_n = 0\ ,\ \text{sinon}\ ,$$

$$x_n = \sqrt[n]{n \cdot 4^n} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt[n]{n\left|\left(\cos((6n+1)\pi/4)\right)^n\right|}\ .$$

Exercice 3. : (6 pts). Soit $\varphi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 1/x$.

1. Montrer que φ est convexe.
2. Montrer que $\ln 2 \leq 3/4$. (Indication : on pourra utiliser la droite reliant les points de coordonnées $(1;\varphi(1))$ et $(2;\varphi(2))$.
3. Montrer que $\ln 2 \geq 5/8$. (Indication : on pourra utiliser la tangente en 2 au graphe de φ).

Exercice 4. : Soit $f_0, f_1 : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définies par $f_0(x) = x/3$ et $f_1(x) = 2/3 + x/3$. On remarque que f_0 et f_1 sont continues et strictement croissantes donc injectives. On définit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, une famille $\{I_{p;k}; p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]\}$ de sous-intervalles de $[0;1]$ de la façon suivante : $I_{0;0} = [0;1]$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$,

$$I_{p+1;2k} \;=\; f_0\big(I_{p;k}\big) \quad \text{et} \quad I_{p+1;2k+1} \;=\; f_1\big(I_{p;k}\big)\,.$$

Pour un intervalle I, $L(I)$ désigne sa longueur. Pour $j \in \{0;1\}$, $f_j(I) = \{f_j(x); x \in I\}$ est l'image directe de I par f_j. **On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant** : Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{R}$ (pour tout n, $K_{n+1} \subset K_n$). Alors

$$K \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

est non vide.

1. Montrer que $f_0([0;1]) = [0;1/3]$ et $f_1([0;1]) = [2/3;1]$. On note que les images de f_0 et f_1 sont disjointes.
2. Pour $p \in \{0;1;2;3\}$, placer les intervalles $I_{p;k}$ dans un dessin représentant l'intervalle $[0;1]$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition suivante : Pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, $I_{p;k}$ est un sous-intervalle compact de $[0;1]$ de longueur $L(I_{p;k}) = 3^{-p}$. Pour $k \neq k'$ dans $\mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, $I_{p;k} \cap I_{p;k'} = \emptyset$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, il existe $k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^{p-1} - 1]$ tel que $I_{p;k} \subset I_{p-1;k'}$.
   a). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   b). Montrer que la proposition est héréditaire. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer qu'il existe au plus deux intervalles du type $I_{p+1;k'}$ qui sont inclus dans $I_{p;k}$. (Indication : on pourra utiliser la longueur des intervalles).
5. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer qu'il existe exactement deux intervalles du type $I_{p+1;k'}$ qui sont inclus dans $I_{p;k}$. (Indication : on pourra utiliser le nombre d'intervalles dans une génération).
6. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit
$$C_p \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]} I_{p;k}\,.$$
   Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, C_p est un compact non vide et que $C_{p+1} \subset C_p$.
7. Soit
$$C \;=\; \bigcap_{p\in\mathbb{N}} C_p\,.$$
   Montrer que C est un compact non vide.
8. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \cap I_{p;k} \neq \emptyset$. En déduire que $C \cap I_{p;k} \neq \emptyset$.
9. Soit $x \in C$. Par définition de C, il existe une suite $(k_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \in I_{p;k_p}$. Soit $\delta > 0$.

a). Soit $P \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-P} < \delta$. Montrer que, pour $p \geq P$, $I_{p;k_p} \subset]x-\delta; x+\delta[$.

b). Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^q - 1]$ tels que $I_{q;k} \subset]x-\delta; x+\delta[\setminus \{x\}$.

10. Montrer que C est d'intérieur vide. (Indication : pour $\delta > 0$ et $x \in C$, montrer qu'il existe p assez grand tel que $]x-\delta; x+\delta[$ n'est pas inclu dans C_p).
11. Montrer que tout point de C est un point d'accumulation de C.

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.
Corrigé du contrôle continu du 6 mars 2015.

Exercice 1 : 1. Vrai. 2. Faux. 3. Vrai. 4. Faux. 5. Vrai. 6. Vrai. 7. Vrai. 8. Faux. 9; Faux. 10. Faux.

Exercice 2 : Pour $a > 1$, on sait que $\lim a^{-n} = 0$. Donc (u_n) converge vers 0. Par le cours, 0 est aussi la limite supérieure de (u_n).
Pour tout n, $v_{2n} = 16^n$ donc (v_{2n}) tend vers $+\infty$. La suite (v_n) n'est donc pas majorée. Par le cours, sa limite supérieure est $+\infty$.
Pour tout n, $w_n \leq 1$. Donc $\limsup w_n \leq \sup_n w_n \leq 1$. Comme $w_{4n} = 1-(4n+1)^{-1}$, (w_{4n}) tend vers 1. Comme c'est une sous-suite de (w_n), on a, par le cours

$$1 \;=\; \lim w_{4n} \;=\; \limsup w_{4n} \;\leq\; \limsup w_n \leq 1\,.$$

D'où $\limsup w_n = 1$.
Pour $n > 0$, $x_n = 4e^{(1/n)\ln n}$. Comme $\lim (1/n)\ln n = 0$, $\lim x_n = 4$, par continuité de l'exponentielle. Par le cours, $\limsup x_n = \lim x_n = 4$.
Pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} y_n \;&=\; \left|\cos((6n+1)\pi/4)\right| \cdot e^{(1/n)\ln n} \;=\; \left|\cos(\pi/4 + 3n\pi/2)\right| \cdot e^{(1/n)\ln n} \\ &= \left|\cos(\pi/4 - n\pi/2)\right| \cdot e^{(1/n)\ln n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{(1/n)\ln n}\,. \end{aligned}$$

La suite (y_n) tend donc vers $1/\sqrt{2}$ et $\limsup y_n = 1/\sqrt{2}$.

Exercice 3 :
1. φ est une fonction C^2. De plus, pour $x > 0$, $\varphi'(x) = -1/x^2$ et $\varphi''(x) = 2/x^3 \geq 0$. φ' est croissante donc, par le cours, φ est convexe.
2. Le segment reliant les points $(1;\varphi(1)) = (1;1)$ et $(2;\varphi(2)) = (2;1/2)$ est une corde pour le graphe de φ. Comme φ est convexe, le graphe de φ restreinte à $[1;2]$ est sous le segment. Donc, pour $t \in [1;2]$,

$$\frac{3}{2} - \frac{t}{2} \;=\; \varphi(1) + (t-1)\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} \;\geq\; \varphi(t)\,.$$

En "intégrant" ces inégalités, on obtient

$$\frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \;=\; \int_1^2 \Big(\frac{3}{2} - \frac{t}{2}\Big)\,dt \;\geq\; \int_1^2 \varphi(t)\,dt \;=\; \ln 2\,.$$

3. Comme φ est convexe et dérivable, le graphe de φ est au-dessus de sa tangente en 2, qui est le graphe de la fonction $t \mapsto \varphi(2) + (t-2)\varphi'(2)$. Donc, pour tout $t > 0$,

$$\varphi(t) \;\geq\; \varphi(2) \;+\; (t-2)\varphi'(2) \;= \frac{1}{2} \;+\; \frac{-1}{4}(t-2) \;=\; 1 \;-\; \frac{t}{4}\,.$$

En "intégrant" ces inégalités, on obtient

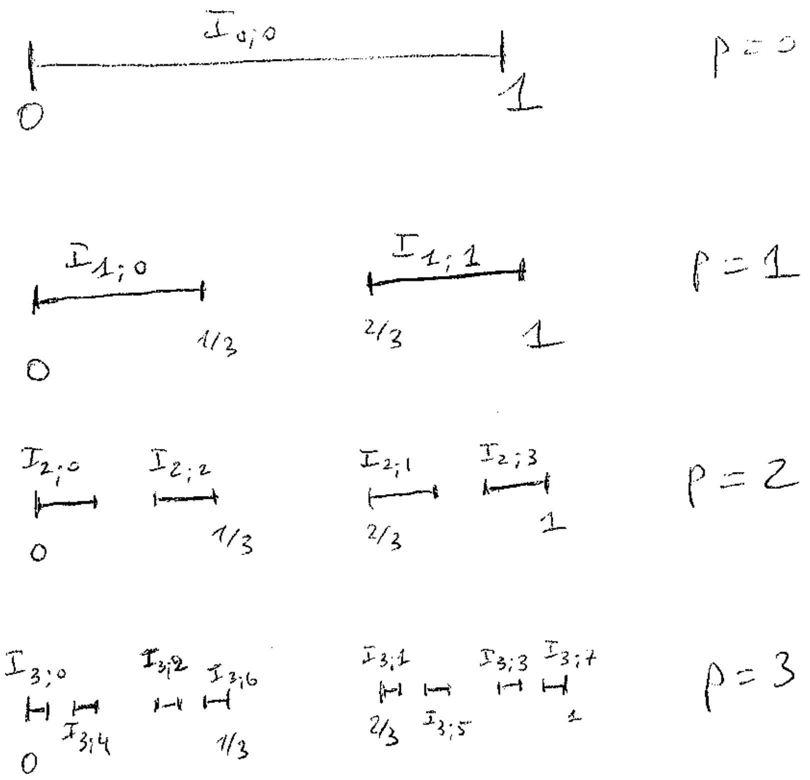
$$\ln 2 = \int_1^2 \varphi(t)\,dt \;\geq\; \int_1^2 \Big(1 - \frac{t}{4}\Big)\,dt \;=\; 1 \;-\; \frac{3}{8} \;=\; \frac{5}{8}\,.$$

Exercice 4 :
1. f_0 étant continue et strictement croissante, $f_0([0;1]) = [f_0(0); f_0(1)] = [0; 1/3]$. De même $f_1([0;1]) = [f_1(0); f_1(1)] = [2/3; 1]$.
2. Voir dessin.
3. a). Pour $p = 1$, on a les deux intervalles $I_{1;0} = f_0([0;1]) = [0;1/3]$ et $I_{1;1} = f_1([0;1]) = [2/3;1]$. Il sont bien compacts, disjoints, de longueur 3^{-1}. De plus, ils sont tous les deux inclus dans $I_{0;0} = [0;1]$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
3. b). On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie. Les intervalles $I_{p+1;k}$ sont des images par des applications continues d'intervalles compacts (par hypothèse de récurrence) donc sont des intervalles compacts. De plus, $I_{p+1;k} = f_j(I_{p;\ell})$ (pour un $j \in \{0;1\}$) et si $I_{p;\ell} = [a_{p;\ell}; b_{p;\ell}]$ alors $I_{p+1;k} = [f_j(a_{p;\ell}); f_j(b_{p;\ell})]$, car f_j est croissante. Donc $L(I_{p+1;k}) = f_j(b_{p;\ell}) - f_j(a_{p;\ell}) = (b_{p;\ell} - a_{p;\ell})/3 = 3^{-p}3^{-1} = 3^{-p-1}$. Par hypothèse de récurrence, $I_{p;\ell} \subset I_{p-1;\ell'}$ donc $I_{p+1;k} = f_j(I_{p;\ell}) \subset f_j(I_{p-1;\ell'}) = I_{p;k'}$, pour un certain k'. Soit $k \neq k'$ dans $\mathbb{N} \cap [0; 2^{p+1} - 1]$. Si k et k' ont des parités différentes alors l'un des intervalles $I_{p+1;k}$ et $I_{p+1;k'}$ est inclu dans l'image de f_0 et l'autre dans l'image de f_1. Comme ces images sont disjointes, $I_{p+1;k}$ et $I_{p+1;k'}$ le sont aussi. Si $k = 2\ell$ et $k' = 2\ell'$ alors $\ell \neq \ell'$. $I_{p;\ell}$ et $I_{p;\ell'}$ sont disjoints par hypothèse de récurrence donc $I_{p+1;k}$ et $I_{p+1;k'}$ le sont aussi, car f_0 est injective. Si k et k' sont tous les deux impairs, on montre de même, en utilisant l'injectivité de f_1, que $I_{p+1;k}$ et $I_{p+1;k'}$ sont disjoints. $\mathcal{P}(p+1)$ est donc vraie.
4. Si l'intervalle $I_{p;k}$ contenait trois intervalles du type $I_{p+1;\ell}$ alors comme ces derniers sont disjoints, la longueur de $I_{p;k}$ serait strictement plus grande que la somme des longueurs de ces intervalles $I_{p+1;\ell}$. On aurait donc $3^{-p} > 3 \cdot 3^{-p-1} = 3^{-p}$. Contradiction. $I_{p;k}$ contient donc au plus deux intervalles de la génération suivante.
5. Le nombre d'intervalles de la génération p est le nombre d'éléments de $\mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, soit 2^p. On sait que chaque intervalle $I_{p+1;k}$ est contenu dans un $I_{p;k'}$ et qu'un tel intervalle contient au plus 2 intervalles de la génération $p+1$. Si l'un des $I_{p;k}$ contenait au plus un intervalle de la génération $p+1$, on aurait

$$2^{p+1} \leq 1 + \sum_{k' \neq k} 2 = 1 + 2 \times (2^p - 1) = 2^{p+1} - 1\,,$$

c'est-à-dire une contradiction.
6. C_p est une réunion finie de fermés non vides donc c'est un fermé non vide. De plus, chaque $I_{p;k}$ est contenu dans $[0;1]$. Donc $C_p \subset [0;1]$. C_p est donc borné. Il est compact, d'après le cours. Chaque intervalle $I_{p+1;k}$ est contenu dans un $I_{p;k'}$ donc aussi dans C_p. D'où $C_{p+1} \subset C_p$.
7. Comme $(C_p)_p$ est une suite décroissante de compacts non vides (par 6.), C est un compact non vide par le résultat admis.
8. On a $C_p \cap I_{p;k} = I_{p;k} \neq \emptyset$. Supposons que, pour un $0 < n \leq p$, il existe k_n tel que $I_{p;k} \subset I_{n;k_n}$. Comme il existe k_{n-1} tel que $I_{n;k_n} \subset I_{n-1;k_{n-1}}$, on a $I_{p;k} \subset I_{n-1;k_{n-1}}$. Donc, par récurrence descendante, pour tout $0 \leq n \leq p$, $I_{p;k} \subset I_{n;k_n} \subset C_n$ et $C_n \cap I_{p;k} = I_{p;k} \neq \emptyset$. Supposons que, pour un $n \geq p$, il existe k_n tel que $I_{n;k_n} \subset I_{p;k}$. Comme il existe k_{n+1} tel que $I_{n+1;k_{n+1}} \subset I_{n;k_n}$, on a $I_{n+1;k_{n+1}} \subset I_{p;k}$. Donc, par récurrence, pour tout $n \geq p$, il existe k_n tel que $I_{n;k_n} \subset I_{p;k}$. En particulier, pour $n \geq p$, $\emptyset \neq I_{n;k_n} \subset C_n \cap I_{p;k}$.
Comme $C \cap I_{p;k}$ est l'intersection sur $n \in \mathbb{N}$ des compacts non vides $C_n \cap I_{p;k}$, il est non vide par le résultat admis.

9. a). Soit $p \geq P$ et $y \in I_{p;k_p}$. Comme $L(I_{p;k_p}) = 3^{-p}$ et $x \in I_{p;k_p}$, $|x-y| \leq 3^{-p} \leq 3^{-P} < \delta$. Donc $y \in]x-\delta; x+\delta[$. D'où $I_{p;k_p} \subset]x-\delta; x+\delta[$.
9. b). Soit $p \geq P$. D'après 5., $I_{p;k_p}$ contient deux intervalles du type $I_{p+1;\ell}$. L'un d'eux est forcément $I_{p+1;k_{p+1}}$, puisqu'il contient x, comme $I_{p;k_p}$. L'autre ne contient pas x puisqu'ils sont disjoints. Il existe donc $k \neq k_{p+1}$ tel que $I_{p+1;k} \subset I_{p;k_p}$. Par 9. a). et par le fait que $x \notin I_{p+1;k}$, $I_{p+1;k} \subset]x-\delta; x+\delta[\backslash \{x\}$.
10. Soit $x \in C$ et $\delta > 0$. D'après le 9. a)., pour p assez grand, $I_{p;k_p} = [a_p; b_p] \subset]x-\delta; x+\delta[$. Donc $x - \delta < a_p < b_p < x + \delta$. Comme les autres intervalles de la génération p sont disjoints de $I_{p;k_p}$ et sont en nombre fini, il existe $\alpha_p > 0$ tel que $[a_p - \alpha_p; a_p[\cap C_p = \emptyset$. Comme $]x-\delta; x+\delta[\cap [a_p - \alpha_p; a_p[\neq \emptyset$, $]x-\delta; x+\delta[$ n'est pas inclu dans C_p. Comme $C \subset C_p$, $]x-\delta; x+\delta[$ n'est pas inclu dans C. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, $x \notin \mathring{C}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in C$, $\mathring{C} = \emptyset$.
11. Soit $x \in C$ et $\delta > 0$. D'après 9. b)., il existe $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^q - 1]$ tels que $I_{q;k} \subset]x-\delta; x+\delta[\backslash \{x\}$. Par 8., il existe $y \in C \cap I_{q;k}$. Donc $C \cap]x-\delta; x+\delta[\backslash \{x\}$ contient y. Il n'est donc pas vide. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, x est un point d'accumulation de C.


$I_{0;0}$
0
1
$p = 0$
$I_{1;0}$
$I_{1;1}$
0
1/3
2/3
1
$p = 1$
$I_{2;0}$
$I_{2;2}$
$I_{2;1}$
$I_{2;3}$
0
1/3
2/3
1
$p = 2$
$I_{3;0}$
$I_{3;4}$
$I_{3;2}$
$I_{3;6}$
$I_{3;1}$
$I_{3;5}$
$I_{3;3}$
$I_{3;7}$
0
1/3
2/3
1
$p = 3$