Université de Cergy-Pontoise.

Contrôle continu d'approfondissements, 17 avril 2015 (1 h 30 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 pts). On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée (E_0) qui est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions S de l'équation (E).

Exercice 2. : (6 pts). Résoudre l'équation différentielle (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; 2Y(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. : (6 pts). Résoudre l'équation différentielle du second ordre (E) d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) = y(t) + e^t$.

Exercice 4. : (4 pts). On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t); x_2(t))^T$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \begin{cases} x_1'(t) &= t x_2(t) \\ x_2'(t) &= t x_1(t) \end{cases}.$$

1. Montrer qu'il existe $(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ tel que $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$U(t) \;=\; e^{t^2/2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

   soit solution de (E).
2. Montrer qu'il existe $(b_1; b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ tel que $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$V(t) \;=\; e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

   soit solution de (E).
3. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions S de l'équation (E) ?

Fin de l'épreuve.