Université de Cergy-Pontoise.

Examen d'approfondissements, 13 mai 2015 (3 h.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (4 pts). On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée (E_0) qui est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions S de l'équation (E).

Exercice 2. : (4 pts). Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n \;=\; \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{4n+1}{3n+7}\,, \quad v_n = \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big)\,,$$

$$w_n = (-1)^n\Big(2 - \frac{1}{n+1}\Big) \quad \text{et} \quad x_n \;=\; (-1)^n n \;-\; \ln(n+1)\,.$$

Exercice 3. : (7 pts). Vrai ou faux. Répondre **avec justification**. 0,25 point par réponse correcte, le reste des points pour la justification.

1. L'intervalle $[-7; 5[$ est fermé. (0,75 point).
2. L'intérieur de $\{-7; 0; 1; 4\}$ est vide. (1,25 point).
3. L'adhérence de $\{-2\}\cup]1; 3]$ est $\{-2\} \cup [1; 3]$. (1,25 point).
4. Le point 0 est un point d'accumulation de $\{0\} \cup \{2 - n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$. (0,75 point).
5. Une fonction continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ est minorée. (1 point).
6. Une fonction convexe sur l'intervalle $]-1; 1[$ est majorée. (1 point).
7. Une fonction convexe sur l'intervalle $[-1; 1]$ est majorée. (1 point).

Tourner SVP.

Exercice 4. : (3 pts). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \;=\; e^{-\left(|x| + \frac{1}{n}\right)^2} .$$

1. Montrer que, pour $y \in \mathbb{R}$, $e^y \geq 1 + y$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(y) = (2y+1)e^{-y^2}$. Montrer que

$$\sup \varphi \;:=\; \sup_{y \in \mathbb{R}} \varphi(y) \;=\; \varphi(1/2) .$$

   (Indication : on pourra étudier les variations de φ).
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \;\leq\; e^{-x^2} \;-\; f_n(x) \;\leq \frac{1}{n} \cdot \left(2|x| \;+\; \frac{1}{n}\right) \cdot e^{-x^2} \;\leq\; \frac{\varphi(|x|)}{n} .$$

4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5. : (5 pts). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur stritement positive. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe si

$$\forall (a;b) \in I^2;\; a < b\,,\, \forall t \in [0;1]\,,\; f\big(ta + (1-t)b\big) \;\leq\; tf(a) \;+\; (1-t)f(b) . \qquad (1)$$

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, soit $f_\mu : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\mu(x) = f(x) + \mu x$. On considère la propriété $\mathcal{P}(f)$ suivante

$$\forall (a;b) \in I^2;\; a < b\,,\, \forall \mu \in \mathbb{R}\,,\; \sup_{x \in [a;b]} f_\mu(x) \;<\; +\infty\,,\; \sup_{x \in [a;b]} f_\mu(x) \in \{f_\mu(a); f_\mu(b)\} . \qquad (2)$$

On va montrer l'équivalence : f est convexe si et seulement si $\mathcal{P}(f)$ est vraie.

1. Soit $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes. Montrer que $g + h$ est convexe.
2. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a < b$. Montrer que la restriction de g à $[a;b]$ est bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in [a;b]} g(x) \in \{g(a); g(b)\} .$$

3. On suppose f convexe. Montrer que $\mathcal{P}(f)$ est vraie.
4. On suppose désormais que $\mathcal{P}(f)$ est vraie. Soit $x < y < z$ dans I. D'après $\mathcal{P}(f)$ avec $a = x$, $b = z$ et

$$\mu \;=\; -\frac{f(z) - f(x)}{z - x} ,$$

   on a $S := \sup_{t \in [x;z]} f_\mu(t) \in \{f_\mu(x); f_\mu(z)\}$.
   a). On suppose que $S = f_\mu(x)$. Montrer les inégalités

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \;\leq\; \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq\; \frac{f(z) - f(y)}{z - y} . \qquad (3)$$

   b). On suppose que $S = f_\mu(z)$. Montrer les inégalités (3).
5. En déduire que f est convexe.

Fin de l'épreuve.