Université de Cergy-Pontoise.

Examen d'approfondissements, 8 juin 2015 (2 h.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 pts). On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée (E_0) qui est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions S de l'équation (E).

Exercice 2. : (4 pts). On rappelle que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n \;=\; \frac{(-1)^n}{n^2+1} + \frac{\ln(2n+1)}{\sqrt{n+1}}\,, \qquad v_n = \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{6}\Big)\,.$$

Exercice 3. : (6 pts). Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $g(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $g(x) = 1-x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{x^2+n} \quad \text{et} \quad g_n(x) \;=\; g(x+n)\,.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\sup g_n \;:= \sup\big\{g_n(x);\, x \in \mathbb{R}\big\} \;=\; 1\,.$$
3. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$ vers la fonction nulle.

Tourner SVP.

Exercice 4. : (7 pts). Vrai ou faux. Répondre **avec justification**. 0,25 point par réponse correcte, le reste des points pour la justification.

1. L'intervalle $[-7; 5[$ est ouvert. (0,75 point).
2. L'adhérence de $]1; 3]$ est $[1; 3]$. (1,25 point).
3. L'intervalle $[0; 2[$ est compact. (1 point).
4. Une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-1; 1[$ est majorée. (0,75 point).
5. Une fonction définie et convexe sur l'intervalle $]-1; 1[$ est dérivable. (0,75 point).
6. Une fonction définie et continue sur $[-1; 1]$ est uniformément continue. (1 point).

Fin de l'épreuve.