Université de Cergy-Pontoise.

Contrôle continu d'approfondissements, 7 mars 2016 (55 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (13 pts). Déterminer la limite supérieure des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = 2^{-n} - n^{-1}\ln(n+1) \ , \ v_n = (-7)^n \ , \ w_n = \sin\big((3n+1)\pi/6\big) \ ,$$

$$x_n = (-1)^n \ + \ (3+n)(1+2n)^{-1} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}} \ .$$

Même question pour la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $z_n = -1$, si $n \notin 3\mathbb{N}$, et $z_n = \ln(1+1/n)$, si $n \in 3\mathbb{N}$. On a noté $3\mathbb{N} = \{3k; k \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des multiples entiers et positifs de 3.

Exercice 2. : (5 points). Vrai ou faux. Répondre **sans justification**. $-0{,}25$ point par réponse fausse, 0,5 point par réponse juste, 0 point pour l'absence de réponse. Mais la note minimale à l'exercice sera 0.

1. Une fonction convexe sur l'intervalle $]0;1[$ est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est positive.
2. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1;+\infty[$ est croissante.
3. Une fonction convexe sur l'intervalle $]0;2]$ est continue.
4. Une fonction convexe sur l'intervalle $]0;2]$ est minorée.
5. Une fonction convexe sur un intervalle qui admet deux minima distincts est constante.
6. Si la limite supérieure d'une suite est finie alors la suite converge.
7. Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup(-u_n) = -\limsup u_n$.
8. Une suite croissante admet une limite supérieure positive.
9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\lim u_n$ existe et vaut $+\infty$ et $\limsup v_n > 0$. Alors $\limsup u_n v_n = +\infty$.
10. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est un ensemble borné.

Exercice 3. : (3 pts). Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = -\ln(1+x^2)$.

1. φ est-elle convexe ?
2. Soit I, J des invervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexes. La fonction $g \circ f$ (définie sur I par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$) est-elle toujours convexe ?

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2.
Corrigé du contrôle continu du 7 mars 2015.

Exercice 1 :
La suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $1/2 < 1$ donc converge vers 0. D'autre part, pour $n > 0$,

$$\frac{-\ln(n+1)}{n} = -\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{n+1} = -(1+n^{-1}) \cdot \frac{\ln(n+1)}{n+1} .$$

Comme $\lim n^{-1}\ln n = 0$ (cf. L1), $\lim(n+1)^{-1}\ln(n+1) = 0$ comme limite d'une sous-suite. Comme $\lim 1 + n^{-1} = 1$, on en déduit l'existence de la limite suivante et sa valeur :

$$\lim \frac{-\ln(n+1)}{n} = 0 .$$

Par somme, u converge vers 0. Par le cours, $\limsup u_n = \lim u_n = 0$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} = 7^{2n}$, $\lim v_{2n} = +\infty$. La suite v n'est donc pas majorée. Par le cours, $\limsup v_n = +\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{4n+1} = \sin(2\pi/3 + 2n\pi) = \sin(2\pi/3)$. Donc $(w_{4n+1})_n$ converge vers $\sin(2\pi/3)$ et, par le cours, $\sin(2\pi/3) = \lim w_{4n+1} = \limsup w_{4n+1} \le \limsup w_n$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sin(\pi/6 + n\pi/2)$ donc $|w_{2n+1}| = \sin(\pi/6 + \pi/2) = \sin(2\pi/3)$ et $|w_{2n}| = \sin(\pi/6) \le \sin(\pi/3) = \sin(2\pi/3)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \le \sin(2\pi/3)$ et, par le cours, $\limsup w_n \le \sup w_n \le \sin(2\pi/3)$. D'où $\limsup w_n = \sin(2\pi/3)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha_n := \frac{3+n}{1+2n} = \frac{1+3/n}{2+1/n}$$

donc converge vers $1/2$ quand $n \to \infty$. D'autre part, on sait que $\limsup(-1)^n = 1$. Par un résultat du cours, $\limsup x_n = \limsup(-1)^n + \lim \alpha_n = 1 + 1/2 = 3/2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n = \exp\Big(n^{-1}\ln\big(e^{\sqrt{n}\ln n}\big)\Big) = \exp\Big(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\Big) = \exp\Big(2 \cdot \frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\Big) .$$

Comme $\lim n^{-1}\ln n = 0$ (cf. L1), $\lim(\sqrt{n})^{-1}\ln\sqrt{n} = 0$ comme limite d'une sous-suite. Comme la fonction exponentielle est continue, y converge vers $\exp(0) = 1$. D'où, par le cours, $\limsup y_n = \lim y_n = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{3n} = \ln(1 + (3n)^{-1})$ donc, par continuité du logarithme, la suite $(z_{3n})_n$ converge vers $\ln 1 = 0$. Par le cours, $0 = \lim z_{3n} = \limsup z_{3n} \le \limsup z_n$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \ln(1+1/n)$ si $n \in 3\mathbb{N}$ et $z_n = -1 \le 0 = \ln 1 \le \ln(1+1/n)$ si $n \notin 3\mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \le \ln(1 + 1/n)$. Par le cours, $\limsup z_n \le \limsup \ln(1 + 1/n)$. Or la suite $(\ln(1+1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 1 = 0$ donc $\limsup z_n \le \limsup \ln(1+1/n) = \lim \ln(1 + 1/n) = 0$. D'où $\limsup z_n = 0$.

Exercice 2 : 1. Faux. 2. Faux. 3. Faux. 4. Vrai. 5. Faux. 6. Faux. 7. Faux. 8. Faux. 9. Vrai. 10. Vrai.

Exercice 3 :
1. Comme composée de fonctions de classe C^2, φ est de classe C^2. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi'(x) \;=\; -\frac{2x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) \;=\; -2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

Comme φ'' change de signe ($\varphi''(0) < 0$ et $\varphi''(2) > 0$), φ n'est pas convexe, d'après le cours.
2. Non, la fonction $g \circ f$ n'est pas toujours convexe. En voici un contre-exemple. Pour $I = \mathbb{R}$ et $J = [1; +\infty[$, soit $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 1 + x^2$ et $g(y) = -\ln y$. f et g sont de classe C^2. De plus, pour $x \in I$ et $y \in J$, $f''(x) = 2 > 0$ et $g''(y) = y^{-2} > 0$. f et g sont donc convexes par le cours. Mais $g \circ f = \varphi$ n'est pas convexe d'après le 1.