Université de Cergy-Pontoise.

Contrôle continu d'approfondissements, 2 mars 2016 (90 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. La note sera sur 20 et le barème est indicatif. L'épreuve comporte **4** exercices.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 pts). On considère sur $\mathbb{R}$ le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ d'inconnue $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $Z'(t) = D \cdot Z(t) + B_0(t)$ où

$$B_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note les coordonnées de l'inconnue Z dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par z_1 et z_2. On note par (E_1) (resp. (E_2)) l'équation différentielle satisfaite par z_1 (resp. z_2). Ce sont des équations différentielles linéaires du premier ordre.

1. L'ensemble S_1 des solutions de l'équation différentielle (E_1) est de la forme $\{z_{1;1} + kz_{1;0}, k \in \mathbb{R}\}$, pour des fonctions $z_{1;1}, z_{1;0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Déterminer cet ensemble.
2. L'ensemble S_2 des solutions de l'équation différentielle (E_2) est de la forme $\{z_{2;1} + kz_{2;0}, k \in \mathbb{R}\}$, pour des fonctions $z_{2;1}, z_{2;0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Déterminer cet ensemble.
3. L'ensemble $S_{\mathcal{F}}$ des solutions du système sans second membre $(\mathcal{F})$ associée à $(\mathcal{E})$ est de la forme $\{k_1 Z_1 + k_2 Z_2, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$, pour des fonctions $Z_1, Z_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Déterminer cet ensemble en fonction de $z_{1;1}$, $z_{1;0}$, $z_{2;1}$ et $z_{2;0}$.
4. Déterminer l'ensemble $S_{\mathcal{E}}$ des solutions du système $(\mathcal{E})$ en fonction de $z_{1;1}$, $z_{1;0}$, $z_{2;1}$ et $z_{2;0}$.
5. Soit
$$A \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $A = PDP^{-1}$ pour une matrice 2×2 convenable P.
6. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel linéaire $(\mathcal{G})$ d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $Y'(t) = A \cdot Y(t) + B_1(t)$ où $B_1(t) = P \cdot B_0(t)$.

Exercice 2. : (5 pts). Soit (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$.

1. Donner le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ du premier ordre d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associée à (E), système qui est de la forme $Y'(t) = A \cdot Y(t)$.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer P, une matrice 2×2 inversible, telle que $A = PTP^{-1}$ où
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que la fonction $t \mapsto Z(t) = P^{-1} \cdot Y(t)$ est solution du système différentiel linéaire $(\mathcal{F})$ donné par $Z'(t) = T \cdot Z(t)$ si et seulement si Y est solution de $(\mathcal{E})$.
5. Résoudre le système $(\mathcal{F})$. (Indication : on pourra introduire les composantes $t \mapsto z_1(t)$ et $t \mapsto z_2(t)$ de $t \mapsto Z(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et résoudre les équations qu'elles vérifient.)
6. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et celui de (E).
7. **(Hors barème.)** On pose $N = T + I_2$, où I_2 est la matrice identité 2×2. Déterminer des fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tT) = f(t)I_2 + g(t)N$. (Indication : on pourra remarquer que $N^2 = 0$). Retrouver le résultat du 5.

Exercice 3. : (5 pts). On considère les fonctions $\alpha, \beta, \gamma : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = -1/3$, $\gamma(0) = 0$, et, pour $t > 0$, par

$$\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad \beta(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^3}, \quad \gamma(t) = t\beta(t).$$

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions $f_n : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \alpha\big(x^2 + n^{-1}\big) = \frac{\sin\big(x^2 + n^{-1}\big)}{x^2 + n^{-1}}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1;1]$ vers la fonction $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \alpha(x^2)$.
2. Montrer que α, β et γ sont continues. Montrer que la dérivée γ' de γ est bien définie et bornée sur $]0;2]$. (Indication : on pourra exprimer γ' en fonction de α et β.)
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que f_n est dérivable et que, pour tout $x \in [-1;1]$, $f_n'(x) = 2x\gamma(x^2 + n^{-1})$.
4. Soit $g : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x\gamma(x^2)$. Montrer que, pour tout $x \in [-1;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\big|f_n'(x) - g(x)\big| \leq \frac{2|x|}{n} \cdot \sup_{t\in]0;2]} |\gamma'(t)|. \tag{1}$$
5. Montrer que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1;1]$ vers la fonction g.
6. En déduire que f est dérivable sur $[-1;1]$. Que vaut $f'(0)$?

Exercice 4. : (4 pts). Soit $\varphi : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(x) = 0$ si $x \in [1/2;2[\cup[4;+\infty[$, $\varphi(x) = 4x$ si $x \in [0;1/4[$, $\varphi(x) = -4x+2$ si $x \in [1/4;1/2[$, $\varphi(x) = x-2$ si $x \in [2;3[$ et $\varphi(x) = -x+4$ si $x \in [3;4[$. On considère la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $\varphi_n(t) = \varphi(t^n)$.

1. Dessiner le graphe de la fonction φ (sans justification). Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;+\infty[$.
2. Que peut-on dire de la nature, lorsque $n \to \infty$, des suites réelles
$$\Big(\varphi_n\big(1/\sqrt[n]{4}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \Big(\varphi_n\big(\sqrt[n]{3}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \ ?$$
3. La convergence de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme sur $[0;+\infty[$? Sur $[0;1]$? Sur $[1;2]$? Sur $A_\delta = [0;+\infty[\backslash]1-\delta;1+\delta[$ avec $\delta \in]0;1[$?

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2.
Corrigé du contrôle continu du 7 mars 2015.

Exercice 1 :
1. z_1 satisfait l'équation (E_1) d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $y'(t) = y(t) + e^{-3t}$. D'après le cours de L1, on peut prendre $z_{1;0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$z_{1;0}(t) \;=\; e^{\int_0^t 1\, ds} \;=\; e^t \,.$$

On cherche $z_{1;1}$ sous la forme $z_{1;1} = u(t)z_{1;0}(t)$. $z_{1;1}$ est solution de (E_1) si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}\,,\quad u'(t)z_{1;0}(t) \,+\, u(t)z'_{1;0}(t) \;=\; u(t)z_{1;0}(t) \,+\, e^{-3t} \\ \Longleftrightarrow\; & \forall t \in \mathbb{R}\,,\quad u'(t)z_{1;0}(t) \;=\; e^{-3t} \\ \Longleftrightarrow\; & \forall t \in \mathbb{R}\,,\quad u'(t) \;=\; e^{-4t}\,. \end{aligned}$$

En choisissant $u(t) = (-4)^{-1}e^{-4t}$, la dernière proposition des équivalences précédentes est vraie donc $t \mapsto z_{1;1} = (-4)^{-1}e^{-4t}e^t = (-4)^{-1}e^{-3t}$ est solution de (E_1).
2. z_2 satisfait l'équation (E_2) d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $y'(t) = -y(t) + 1$. D'après le cours de L1, on peut prendre $z_{2;0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $z_{2;0}(t) = e^{-t}$. Comme précédemment, on cherche $z_{2;1}$ par la méthode de variations des constantes et on trouve $z_{2;1}(t) = 1$. (On peut aussi deviner puis vérifier que la fonction constante égale à 1 est solution de (E_2).)
3. Soit $Z_1, Z_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$Z_1(t) \;=\; \begin{pmatrix} z_{1;0}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ z_{2;0}(t) \end{pmatrix}$$

Les fonctions Z_1 et Z_2 sont solutions de $(\mathcal{F})$ d'après les propriétés de $z_{1;0}$ et $z_{2;0}$. Si, pour $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ est nulle alors, en considérant la première composante, on voit que $\lambda_1 = 0$ et, en considérant la seconde composante, on voit que $\lambda_2 = 0$. Donc $(Z_1; Z_2)$ est un système libre dans l'espace vectoriel $S_{\mathcal{F}}$ de dimension 2. Il en est une base. Donc ces fonctions Z_1 et Z_2 conviennent.
4. D'après le cours, $S_{\mathcal{E}} = \{Z_0 + k_1 Z_1 + k_2 Z_2, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$, où Z_0 est une solution particulière de $(\mathcal{E})$. On choisit $Z_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$Z_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} z_{1;1}(t) \\ z_{2;1}(t) \end{pmatrix}\,.$$

D'après 1 et 2, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D \cdot Z_0(t) \,+\, B_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} z_{1;1}(t) \,+\, e^{-3t} \\ -z_{2;1}(t) \,+\, 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} z'_{1;1}(t) \\ z'_{2;1}(t) \end{pmatrix} \;=\; Z'_0(t)\,.$$

Donc Z_0 est bien une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
5. Le polynôme caractéristique de A est $\text{Det}(XI_2 - A) = (X+3)(X-3)+8 = X^2 - 9 + 8 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. On détermine les sous-espaces propres et on trouve

$$\text{Ker}(A - I_2) \;=\; \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(A - I_2) \;=\; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$.
6. On effectue le changement d'inconnue $Y = P \cdot Z$. Y est solution de $\mathcal{G}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad P \cdot Z'(t) \;=\; PP^{-1}AP \cdot Z(t) \,+\, P \cdot B_0(t) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Z'(t) \;=\; P^{-1}AP \cdot Z(t) \,+\, B_0(t) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Z'(t) \;=\; D \cdot Z(t) \,+\, B_0(t)\,, \end{aligned}$$

puisque P est une matrice inversible. Donc l'ensemble des solutions du système différentiel $(\mathcal{G})$ est $\{P \cdot Z; Z \in S_{\mathcal{E}}\}$.

Exercice 2 :
1. D'après le cours, on considère $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \times y(t) \,+\, 1 \times y'(t) \\ -1 \times y(t) \,-\, 2 \times y'(t) \end{pmatrix} \;=\; A \cdot Y(t)\,,$$

en choisissant

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique de A est $\mathrm{Det}(XI_2 - A) = X(X+2) + 1 = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. Son seul sous-espace propre est $\mathrm{Ker}(A + I_2) = \mathrm{Vect}(v_1)$ où

$$v_1 \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme -1 est une racine double du polynôme caractéristique et que son sous-espace propre est de dimension 1, A n'est pas diagonalisable.
3. A est la matrice dans la base canonique $(e_1; e_2)$ d'une certaine application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. On cherche une base $(v_1; v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans cette base soit T, v_1 étant le vecteur propre précédent. Soit $(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Donc, $f(v_2) = 2v_1 - v_2$ si et seulement si $a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) = 2v_1 - v_2$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & a_1\, A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,+\, a_2\, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 - 2a_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2 - a_1 \\ 2 - a_2 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow \quad & a_1 \,+\, a_2 \;=\; -2\,. \end{aligned}$$

On choisit $(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_1 + a_2 = -2$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

est inversible puisque son déterminant vaut $-(a_1 + a_2) = 2 \neq 0$. Par un calcul direct, on vérifie que $P^{-1}AP = T$.

Remarque : On a donc une infinité de choix pour v_2. Il y a cependant un seul v_2 pour lequel la base $(v_1; v_2)$ est orthorgonale, à savoir $v_2 = -e_1 - e_2$ (i.e. quand $a_1 = a_2 = -1$). On peut aussi chercher une base $(w_1; w_2)$ telle que la matrice de f dans cette base soit T et telle que $w_1 = 2^{-1/2}v_1$, un vecteur de norme 1. Dans ce cas, on trouve par la démarche précédente que $(w_1; w_2)$ vérifie la condition imposée si $w_2 = a_1e_1 + a_2e_2$ avec $a_1 + a_2 = \sqrt{2}$. Cette base est orthogonale uniquement quand $a_1 = a_2 = 2^{-1/2}$. Dans ce dernier cas, la base est en fait orthonormale et la matrice correspondante P vérifie $P^{-1} = {}^tP$.

4. Z est solution du système $(\mathcal{F})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Z'(t) = T \cdot Z(t) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad P^{-1} \cdot Y'(t) = P^{-1}AP\,P^{-1} \cdot Y(t) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) = A \cdot Y(t)\,, \end{aligned}$$

puisque P^{-1} est inversible.

5. Soit $(z_1; z_2)$ les composantes de Z dans la base canonique. Z est solution du système $(\mathcal{F})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad z_1'(t) = -z_1(t) + 2z_2(t) \quad \text{et} \quad z_2'(t) = -z_2(t) \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad z_1'(t) = -z_1(t) + 2ke^{-t} \quad \text{et} \quad z_2(t) = ke^{-t}\,. \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, on résoud maintenant l'équation différentielle linéaire d'inconnue v donnée par $v'(t) = -v(t) + 2ke^{-t}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_k = \{v_k + \ell e^{-t}; \ell \in \mathbb{R}\}$. Par la méthode de variation des constantes, on voit que la fonction $t \mapsto v_k(t) = 2kte^{-t}$ convient. Donc Z est solution du système $(\mathcal{F})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists (k;\ell) \in \mathbb{R}^2\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad z_1(t) = (2kt + \ell)e^{-t} \quad \text{et} \quad z_2(t) = ke^{-t} \\ \iff & \exists (k;\ell) \in \mathbb{R}^2\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Z(t) = k \begin{pmatrix} 2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

6. On choisit $(a_1; a_2) = (-1; -1)$ dans la question 3. On a donc

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après 4 et (2), Y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists (k;\ell) \in \mathbb{R}^2\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y(t) = k\,P \cdot \begin{pmatrix} 2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \ell\,P \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff & \exists (k;\ell) \in \mathbb{R}^2\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y(t) = k \begin{pmatrix} -(2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, d'après 1, y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{array}{rlcl} & \exists(k;\ell)\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & y(t) & = -k(2t+1)e^{-t}\ -\ \ell e^{-t} \\ \Longleftrightarrow & \exists(k';\ell')\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & y(t) & = k'te^{-t}\ +\ \ell' e^{-t}\,. \end{array}$$

7. Par définition,

$$N\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct donne $N^2 = 0$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $N^n = 0$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_2^n = I_2$ donc, par la formule du binôme, sachant que N et I_2 commutent,

$$\begin{aligned} T^n\ &=\ (-I_2+N)^n\ =\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^{n-k} I_2^{n-k} N^k\ =\ C_n^0(-1)^n I_2\ +\ C_n^1(-1)^{n-1}N \\ &=\ (-1)^n I_2\ +\ n(-1)^{n-1}N\,. \end{aligned}$$

Bien sûr $T^0 = I_2$. On a donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(tT)\ &=\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}T^n\ =\ T^0\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-1)^n I_2\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-1)^{n-1}nN \\ &=\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\right)I_2\ +\ t\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)N \\ &=\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\right)I_2\ +\ t\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\right)N\ =\ e^{-t}I_2\ +\ te^{-t}N\,. \end{aligned}$$

Par le cours, Z est solution du système $(\mathcal{F})$ si et seulement si

$$\begin{array}{rlcl} & \exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & Z(t) & = \exp(tT)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & Z(t) & = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2bte^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & Z(t) & = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2bte^{-t} \\ be^{-t} \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\,;\ \forall t\in\mathbb{R}\,, & Z(t) & = a\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}\,, \end{array}$$

qui est bien équivalent à (2) en posant $k = b$ et $\ell = a$.

Exercice 3 :

1. La fonction α est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. De plus, comme

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ \neq}}\alpha(t)\ =\ 1\ =\ \alpha(1)\,,$$

α est aussi continue en 0. Soit $x \in [-1;1]$. Comme $\lim n^{-1} = 0$ et α est continue en x^2, on a l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ = \ \alpha(x^2) \ = \ f(x) \, .$$

2. On a déjà montré que α est continue. β est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a, au voisinage de 0,

$$\beta(t) \ = \ \frac{t\big(1 - t^2/2 + o(t^2)\big) - \big(t - t^3/6 + o(t^3)\big)}{t^3} \ = \ \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Big)\big(1 + o(t)\big) \ = \ -\frac{1}{3}\big(1 + o(t)\big)$$

donc β tend vers $-1/3 = \beta(0)$ en 0. Elle est donc continue en 0. γ est le produit de deux fonctions continues donc est continue.
Sur $]0;2]$, γ est dérivable comme produit et quotient de fonctions dérivables et

$$\gamma'(t) \ = \ \frac{-t\sin(t)\cdot t^2 - \big(t\cos(t) - \sin(t)\big)\cdot 2t}{t^4} \ = \ -\alpha(t) - 2\beta(t) \, .$$

Comme α et β sont continues sur $\mathbb{R}$, elles sont bornées sur le compact $[0;2]$. Elles le sont donc aussi sur $]0;2]$ et il en est de même de γ'.
3. La fonction α est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour $t > 0$,

$$\alpha'(t) \ = \ \frac{\cos(t)\cdot t - \sin(t)\cdot 1}{t^2} \ = \ \gamma(t) \, .$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^2 + n^{-1}$ est dérivable et strictement positive, f_n est dérivable par composition et $f_n'(x) = 2x\alpha'(x^2 + n^{-1}) = 2x\gamma(x^2 + n^{-1})$.
4. Soit $x \in [-1;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après 3 et en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction γ sur $[x^2; x^2 + n^{-1}] \subset [0;+\infty[$, l'existence d'un $c \in]x^2; x^2 + n^{-1}[\subset]0;2]$ tel que

$$\begin{aligned} \big|f_n'(x) - g(x)\big| &= 2|x|\cdot\big|\gamma(x^2 + n^{-1}) - \gamma(x^2)\big| = 2|x|\cdot|\gamma'(c)|\cdot\big(x^2 + n^{-1} - x^2\big) \\ &= 2|x|\cdot|\gamma'(c)|\cdot n^{-1} \ \le \ 2|x|n^{-1}\cdot \sup_{t\in]0;2]} |\gamma'(t)| \, . \end{aligned}$$

5. Pour $x \in [-1;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après (1),

$$\big|f_n'(x) - g(x)\big| \ \le \ 2n^{-1}\cdot \sup_{t\in]0;2]} |\gamma'(t)| \, .$$

Le terme de droite est donc un majorant des valeurs prises sur $[-1;1]$ par la fonction $|f_n' - g|$ donc, par définition de la borne supérieure,

$$\sup_{x\in[-1;1]} \big|f_n'(x) - g(x)\big| \ \le \ 2n^{-1}\cdot \sup_{t\in]0;2]} |\gamma'(t)| \, .$$

Comme le terme de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$, on en déduit, par le théorème des gendarmes, que le terme de gauche tend aussi vers 0 ce qui signifie que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1;1]$ vers g.
6. Par 1, 3 et 5, les hypothèses d'un théorème de dérivation du cours sont remplies sur

$[-1;1]$. Ce théorème implique donc que f est dérivable sur $[-1;1]$ et que $f' = g$ sur cet intervalle. De plus, comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on a, d'après 5,

$$f'(0) \ = \ g(0) \ = \ \lim_{n\to\infty} f_n'(0) \ = \ 0\,,$$

puisque la suite $(f_n'(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 4 :
1. Voir dessin ci-joint. On remarque que φ est continue en 0.
Soit $t \in [0;1[$. La suite géométrique $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme φ est continue en 0, la suite $(\varphi(t^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(0) = 0$.
Soit $t > 1$. La suite géométrique $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $t^n \geq 4$ et la suite $(\varphi(t^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à 0 à partir de ce rang N. Elle converge donc vers 0. (Remarque : on peut choisir $N = E((\ln 4)\cdot(\ln t)^{-1}) + 1$.)
La suite $(\varphi(1^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\varphi(1) = 0$ donc converge aussi vers 0.
On a montré que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers la fonction nulle.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n\big(1/\sqrt[n]{4}\big) \ = \ \varphi(1/4) \ = \ 1 \quad \text{et} \quad \varphi_n\big(\sqrt[n]{3}\big) \ = \ \varphi(3) \ = \ 1\,.$$

Les deux suites coïncident avec la suite constante égale à 1, elles convergent donc vers 1.
3. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers 0 uniformément sur $[0;1]$ alors la suite

$$\Big(\sup_{x\in[0;1]} \big|\varphi_n(x)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergerait vers 0. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1/\sqrt[n]{4} \in [0;1]$ et

$$\sup_{x\in[0;1]} \big|\varphi_n(x)\big| \ \geq \ \big|\varphi_n\big(1/\sqrt[n]{4}\big)\big| \ = \ 1\,,$$

donc, par passage à la limite dans les inégalités, on aurait $0 \geq 1$. Contradiction. La convergence n'est pas uniforme sur $[0;1]$.
Par le même raisonnement mais en utilisant la suite

$$\Big(\varphi_n\big(\sqrt[n]{3}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

cette fois et le fait que $\sqrt[n]{3} \in [1;2]$, pour $n \geq 2$, on montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[1;2]$.
Si la convergence était uniforme sur $[0;+\infty[$, elle le serait sur $[0;1]$ par le théorème des gendarmes puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} \big|\varphi_n(x)\big| \ \geq \ \sup_{x\in[0;1]} \big|\varphi_n(x)\big| \ \geq \ 0\,.$$

Contradiction. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0;+\infty[$.
Soit $\delta \in]0;1[$. On a $A_\delta = [0;1-\delta] \cup [1+\delta;+\infty[$. Comme la suite $((1-\delta)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive

et converge vers 0, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $0 \leq (1-\delta)^n \leq 1/4$. Comme la suite $((1+\delta)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on ait $(1+\delta)^n \geq 4$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Soit $n \geq N$. Pour $t \in [0; 1-\delta]$, $0 \leq \varphi_n(t) = \varphi(t^n) \leq \varphi((1-\delta)^n)$, car φ est croissante sur $[0; 1/4]$. Pour $t \geq 1+\delta$, $t^n \geq (1+\delta)^n \geq 4$ donc $\varphi_n(t) = \varphi(t^n) = 0$. Toujours pour $n \geq N$, on a donc

$$\sup_{t\in A_\delta}\bigl|\varphi_n(t)\bigr| \ \leq\ \varphi\bigl((1-\delta)^n\bigr)\,.$$

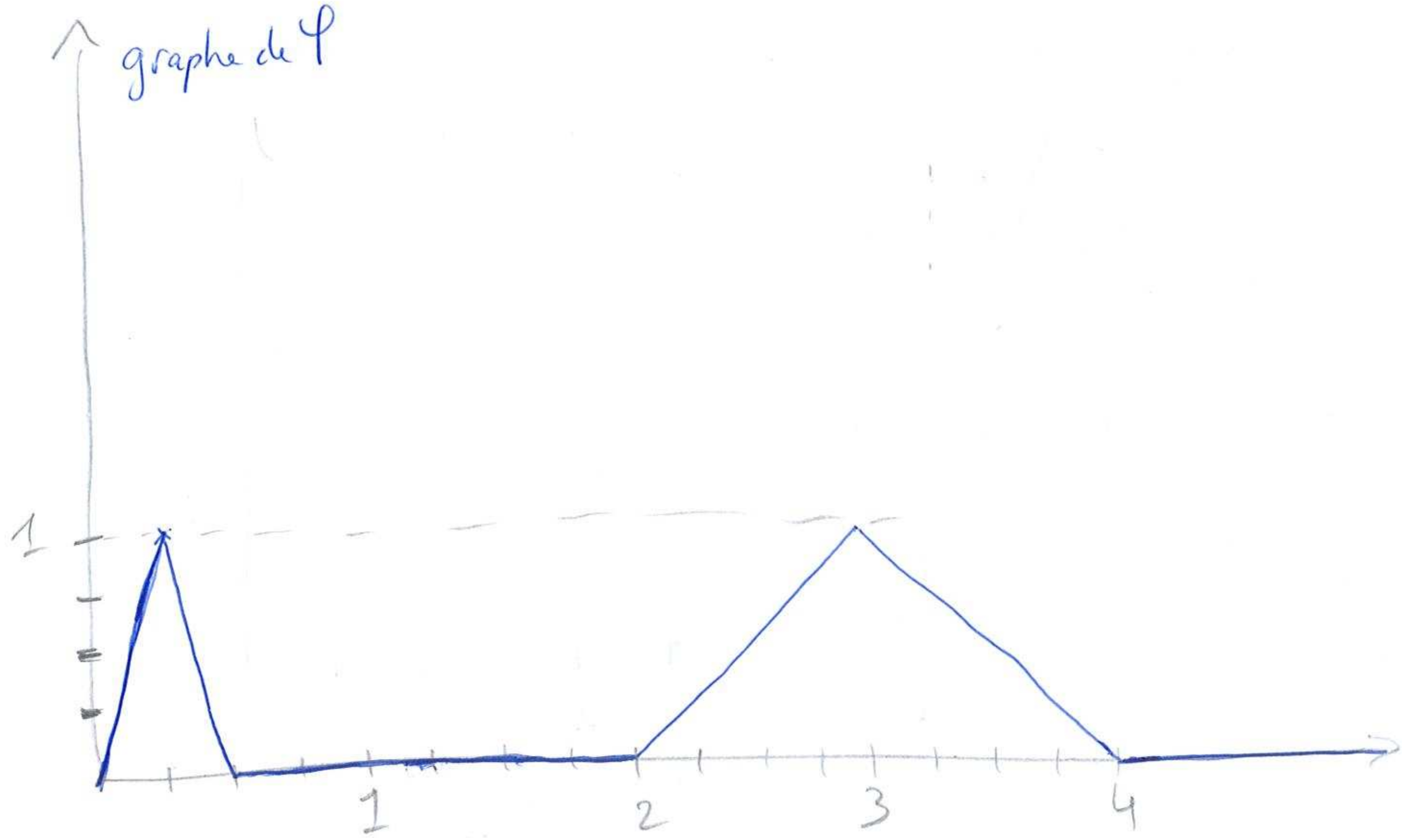
Comme la suite $((1-\delta)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers 0 et φ est continue en 0, la suite

$$\Bigl(\varphi\bigl((1-\delta)^n\bigr)\Bigr)_{n\in\mathbb{N}}$$

tend vers $\varphi(0) = 0$ lorsque $n \to \infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{t\in A_\delta}\bigl|\varphi_n(t)\bigr| \ =\ 0\,,$$

c'est-à-dire que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 uniformément sur A_δ.


graphe de φ
1
1
2
3
4