M1, Contrôle continu de systèmes dynamiques, 15 octobre 2020 (1h 10 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (5 pts). Soit (L) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = A \cdot Y$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.
2. Soit $D = A - N$. Vérifier que $DN = ND$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$.
4. Pour Y_0 de coordonnées $(a_1; a_2; a_3)$ dans la base canonique $(e_1; e_2; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la solution maximale de (L) valant Y_0 en $t = 0$. Déterminer explicitement en fonction de $(a_1; a_2; a_3)$ les fonctions $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = y_1(t)e_1 + y_2(t)e_2 + y_3(t)e_3$.

Exercice 2. : (7 pts). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $(U; V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note par UV le produit des matrices U et V, dans cet ordre. On rappelle que l'application $\varphi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(U; V) = UV$ est bilinéaire.
Soit J un intervalle infini de $\mathbb{R}$ (donc d'intérieur non vide). Soit $B, C : J \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications continues. On considère les équations différentielles (G) et (D) d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I étant un sous-intervalle de J, données par, pour $t \in I$, $Y'(t) = Y(t)B(t) + C(t)$ et $Y'(t) = B(t)Y(t) + C(t)$, respectivement.

1. Montrer que (G) et (D) vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire sur J.
2. On suppose B constante égale à une matrice $B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et C nulle. Résoudre (G) et (D).
3. On suppose que J est un voisinage de 0, que C est nulle et qu'il existe une fonction continue $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour $t \in J$, $B(t) = b(t)B_0$. Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z : J \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$Z(t) = \exp\left(\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)B_0\right) M_0 \,.$$
Vérifier que Z est solution de (D) sur J.
4. Sous les hypothèses du point 3, soit $N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la solution maximale de (D) valant N_0 à $t = 0$.

Tournez, SVP.

Exercice 3. : (10 pts). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note par $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires sur E et par $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des applications linéaires inversibles sur E. On note par I l'application identique sur E, qui l'élément neutre pour la composition dans $\mathcal{L}(E)$. Comme E (resp. $\mathcal{L}(E)$) est de dimension finie, toutes les normes sur E (resp. $\mathcal{L}(E)$) sont deux à deux équivalentes, elles définissent donc toutes la même topologie. De plus, toutes les applications linéaires sur E (resp. $\mathcal{L}(E)$) sont continues.
L'application $\varphi : \mathcal{L}(E)^2 \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(A; B) = A \circ B$, la composée de A par B, est bilinéaire. Pour **simplifier**, on notera $A \circ B$ aussi par AB. Pour $(A; B) \in \mathcal{L}(E)^2$, on note $[A, B] = \varphi(A; B) - \varphi(B; A) = AB - BA$.
On rappelle qu'une application linéaire M sur E, i.e. $M \in \mathcal{L}(E)$, est une projection si $M^2 = M \circ M = M$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de 0. Soit $P : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ de classe C^1 et à valeurs projection. On a donc, pour tout $t \in J$, $P(t)^2 = P(t)$. On veut construire une application $U : J \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$ de classe C^1 telle que

$$\forall t \in J\,, \quad P(t) \;=\; U(t)\,P(0)\,U(t)^{-1}\,. \tag{1}$$

Soit $Q : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ donnée par, pour $t \in J$, $Q(t) = [P'(t), P(t)]$, P' désignant la dérivée de P.
Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{C}$) l'équation différentielle linéaire d'inconnue $X : J_X \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ (J_X étant un sous-intervalle de l'intervalle J) donnée par, pour tout $t \in J_X$, $X'(t) = Q(t)X(t)$ (resp. $X'(t) = -X(t)Q(t)$, resp. $X'(t) = [Q(t), X(t)]$). On **admet** que le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique à ces trois équations. En particulier, les solutions maximales de ces équations sont définies sur J.
On rappelle que, si $A, B : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ sont dérivables, alors AB est dérivable et, pour tout $t \in J$, $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in J$, $P(t)P'(t)P(t) = 0$.
   (Indication : on pourra dériver de deux façons différentes la fonction $J \ni t \mapsto P(t)^2$.)
2. Montrer que, pour tout $t \in J$, on a les égalités
   $$P(t)Q(t) \;=\; -P(t)P'(t)\,, \quad Q(t)P(t) \;=\; P'(t)P(t) \quad \text{et} \quad P'(t) = [Q(t), P(t)]\,.$$
3. Soit U la solution maximale de l'équation $\mathcal{E}$ telle que $U(0) = I$. Soit V la solution maximale de l'équation $\mathcal{F}$ telle que $V(0) = I$. Montrer qu'on a, pour tout $t \in J$, $V(t)U(t) = I = U(t)V(t)$.
   En particulier, pour tout $t \in J$, $U(t)$ est une application linéaire inversible et son inverse est $V(t)$, donc $U : J \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$.
4. Montrer que les fonctions $J \ni t \mapsto P(t)U(t)$ et $J \ni t \mapsto U(t)P(0)$ sont des solutions de $\mathcal{E}$.
5. En déduire que U satisfait la propriété (1).

6. Soit $(e_1; e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^2$. Soit $\rho : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le morphisme d'algèbre qui, à une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$, associe sa matrice dans la base canonique $(e_1; e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\theta : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour $t \in [-1; 1]$, on considère le vecteur $v(t)$ de $\mathbb{R}^2$ donné par $v(t) = (\cos\theta(t))e_1 + (\sin\theta(t))e_2$ et la projection orthogonale $P(t)$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\mathbb{R}^2 \ni w \ \mapsto \ \langle v(t); w \rangle \, v(t) \ \in \ \mathbb{R}^2 \, .$$

Donc $P : [-1; 1] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est une fonction de classe C^1 à valeurs projection. Pour $t \in [-1; 1]$, on pose $Q(t) = [P'(t), P(t)]$. Soit $U : [-1; 1] \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ la fonction définie au 3.
On **admet** que, pour tout $t \in [-1; 1]$, $\rho(Q(t)) = \theta'(t)\Sigma$, où

$$\Sigma \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a). Vérifier que $\rho \circ U$ est solution de l'équation différentielle $\mathcal{M}$ d'inconnue $M : J_M \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (J_M étant un sous-intervalle de $[-1; 1]$) donnée par

$$\forall t \in J_M \, , \quad M'(t) \ = \ \theta'(t) \, \Sigma \, M(t) \, .$$

b). En déduire que, pour tout $t \in [-1; 1]$, l'application linéaire $U(t)$ est une rotation de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 2.)

Fin de l'épreuve.

Barème du contrôle continu du 15 octobre 2020.

Exercice 1 : (5 pts).

1. 0,5 pt.
2. 1 pt.
3. 2 pts.
4. 1,5 pts.

Exercice 2 : (7 pts).

1. 2,5 pts.
2. 2,5 pts.
3. 0,5 pt.
4. 1,5 pt.

Exercice 3 : (10 pts).

1. 0,5 pt.
2. 1,5 pts.
3. 1,5 pts.
4. 1 pt.
5. 1,5 pts.
6. a) : 1 pt. b). 3 pts.