M1, Contrôle continu de systèmes dynamiques, 27 novembre 2020 (2h.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème sur **23** est indicatif.

Une feuille A4 manuscrite et nominative contenant des résultats du cours est autorisée.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (4 pts).

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante de classe C^1. Soit (E) l'équation différentielle, d'inconnue $y : I_y \longrightarrow \mathbb{R}$, I_y étant un intervalle de $\mathbb{R}$, équation donnée par

$$\forall t \in I_y\,, \quad y'(t) \;=\; g\big(t \,+\, y(t)\big)\;.$$

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (E) sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). Montrer que la fonction $\beta : J \ni t \mapsto t + \alpha(t) \in \mathbb{R}$ est croissante. En déduire que $b_+ := \sup J = +\infty$.
3. On considère le cas où g est donnée, pour $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = e^{-x}$. Soit $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). Montrer que $b_- := \inf J > -\infty$.

Exercice 2. : (9 pts).

Soit A, B deux applications linéaires sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée et notée par, respectivement,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note par I_2 la matrice identité 2×2. On note par $\mathrm{Ker}B$ le noyau de B.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ aux équations différentielles (E_A) et (E_B) associées à A et B, respectivement.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante de classe C^1 telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si} \quad x \geq 4, \\ 0 < \varphi(x) < 1 & \text{si} \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$

On **admet** l'existence d'une telle fonction φ.
On note par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad f(X) = \varphi\big(\|X\|^2\big)AX + \Big(1 - \varphi\big(\|X\|^2\big)\Big)BX.$$

Soit (E_f) l'équation différentielle autonome associée à f.

1. Soit Y_1 la solution maximale de (E_A) valant $(1;0)$ à $t = 0$. Montrer que l'image de Y_1 (c'est-à-dire la trajectoire de $(1;0)$ selon l'équation différentielle (E_A)) est $\mathcal{C}$, le cercle unité centré en $(0;0)$.
(Indication : on pourra remarquer que $A^2 = -I_2$.)
2. Déterminer explicitement les solutions maximales Y_2 et Y_3 de (E_B) valant, respectivement, $(2^{-1/2}; 2^{-1/2})$ et $(2;2)$ à $t = 0$.
3. Montrer que f est de classe C^1 et que sa différentielle Df est bornée.
En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle (E_f) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que le champ de vecteurs f est complet.
5. Montrer que $f(X) = 0$ si et seulement si $X \in \mathrm{Ker}B$ et ($\|X\| \geq 2$ ou $X = 0$).
6. Pour $j \in \{1;2;3\}$, déterminer si Y_j est une solution maximale de (E_f).

Exercice 3. : (10 pts).

Pour $c \in \mathbb{C}$, on note par $\overline{c}$ (resp. $\Re c$, resp. $\Im c$) le conjugué (resp. la partie réelle, resp. la partie imaginaire) de c. On identifie $\mathbb{R}$ à la partie $\{x + 0i; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$.

On considère l'équation différentielle (C), donnée par $y' = v(y)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$), associée au champ de vecteurs $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 qui, à $z \in \mathbb{C}$, associe $v(z) = (z - \overline{z})z$.

En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (C) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

1. Montrer que v est de classe C^1.
2. Vérifier que $\{z \in \mathbb{C}; v(z) = 0\} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction "module" $|\cdot|$ est une intégrale première du champ v.
4. Montrer que le champ v est complet.
5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la partie imaginaire $\Im z_0$ de z_0 est non nulle. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la solution maximale de (C) valant z_0 à $t = 0$.
   a). Montrer que la fonction $\Im\gamma$ a partout le même signe strict que $\Im z_0$, c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\Im\gamma)(t) \cdot (\Im z_0) > 0$.
   b). Montrer que la fonction $\Re\gamma$ est strictement décroissante.
   c). Montrer que l'image de $\Re\gamma$ est $]-|z_0|; |z_0|[$.
   d). En déduire que la trajectoire $\mathcal{C}(z_0)$ de z_0 est égale à l'ensemble
   $$\mathcal{L}(z_0) \;=\; \Big\{z \in \mathbb{C}; (\Im z) \cdot (\Im z_0) > 0\Big\} \cap \Big\{z \in \mathbb{C}; |z| = |z_0|\Big\}\,.$$
6. Donner, **sans justification**, les trajectoires de (C) qui forment une partition de la courbe $\mathcal{N}(1)$ de niveau 1 de la fonction module (i.e. $\mathcal{N}(1) = |\cdot|^{-1}(\{1\})$).

Fin de l'épreuve.

Barème du contrôle continu du 27 novembre 2020.

Exercice 1 : (4 pts).

1. 1 pt.
2. 0,5 + 1 = 1,5 pts.
3. 1,5 pts.

Exercice 2 : (9 pts).

1. 1 pt.
2. 1 pt.
3. 1,5 pts.
4. 2 pt.
5. 0,5 pt.
6. 1+1+1 = 3 pts.

Exercice 3 : (10 pts).

1. 0,5 pt.
2. 0,5 pt.
3. 1,5 pts.
4. 1 pt.
5. a). 1,5 pts ; b). 0,5 pt ; c). 2 pts. d). 2 pts.
6. 0,5 pt.