Cours : Systèmes dynamiques **M1** 1

Th. Jecko : jecko@math.cnrs.fr

2 (?) contrôles continus présentiels

Annales sur jecko.perso.math.cnrs.fr

Conseils :

- bien suivre le cours (vital pour les TDs et l'exam)
- chercher les exos. par soi-m.
- consulter la biblio. (- en cas de diff. - pour approf.)
- tjs. intérêt à en faire plus.
- faire les exos. de révision.

Prérequis : calcul diff., esp. de Banach, calcul inté. (Cauchy), topologie.

Biblio. :

H. Cartan : Cours de calcul différentiel.

Hirsch-Smale : Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.

notes de cours disponibles.

Arnaudiès-Fraysse : Cours de math. 3 Compléments d'Analyse.

V. Arnold : équations différentielles ordinaires.

Introduction

Qu'est-ce qu'un syst. dyn. ?

Déf. courante : un syst. (physique) qui évolue au cours du temps.

- mécanique du point, mécanique quantique,
- mécanique des solides.
- météo
- dynamique des populations en biologie.
-

Définition mathématique :

Soit S un ens. sur S

Déf. 0 : Un syst. dynamique sur S est une appl.

$$\phi : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$$
$$t \longmapsto \phi(t;x) = \phi_t(x)$$

t.q. $t \mapsto \phi_t$ est conti. (S doit avoir une structure topo.)

ϕ_t flot.

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

(ϕ_t bij. ou hom. difféomorphisme)

Intérêts :

- en science : beaucoup de phénomènes rentrent dans ce cadre.

  en partic. : les prévisions météo s'appuient essentiellement sur la théorie des syst. dyn.

  cette théorie prévoit des limitations aux prévisions

  Utilisation massive en physique.

  Dév. en chimie, en biologie.

- en math. : La conjecture de Poincaré (purement topo.) (qui date du début du 20e siècle) a été démontrée à l'aide du flot de Ricci.

Exemple : $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(t;(x;y)) \longmapsto (x+t;y)$, $\phi_t(x;y) = (x+t;y)$ flot des transl. le long de l'axe des x.

Syst. dyn. comme sol. d'une éq. (ou d'un syst. d'éq.)

Il est intéressant de chercher un syst. dynamique sol. d'une éq.

Dans ce cours, on va s'intéresser à ce problème lorsque l'éq. est une éq. différentielle (ou un syst. d'éq. diff.).

ouvert non vide

Exemples :

linéaires, 1er ordre :

$y : I \to \mathbb{R}$, $y' = y$ (I int. de $\mathbb{R}$ à trouver)

$y : I \to \mathbb{R}^d$; $y' = y$ ← cette éq. peut être vue comme un syst. d'éq. pour les composantes de y.

$y : I \to \mathbb{R}$, $y'' = ty$, t est la var. de y.

$y : I \to \mathbb{R}$, $y' = ty + t^2$

$y : I \to \mathbb{R}^d$, $y' = A \cdot y + tb$ où $A \in M_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$

non-linéaires :

$y : I \to \mathbb{R}$, $y' = y^2$

$y : I \to \mathbb{R}^d$, $y' = \|y\|^2 \cdot y$

ordre supérieur :

$y : I \to \mathbb{R}^d$, $y'' = y + 2y' + tb$, $b \in \mathbb{R}^d$

$y : I \to \mathbb{R}$, $y'' = y^2$.

Cadre plus géné. : $y : I \to E$ (e.v.n.), $y' = F(t; y)$

$F : I_0 \times U \to E$ (U ouvert de E)

$y'' = G(t; y; y')$

$G : I_0 \times U \times V \to E$

Encore plus géné. : $y : I \to E$, $F(t; y; y') = 0$

ou $G(t; y; y'; y'') = 0$

On va se focaliser sur la situation

$y : I \to \underset{\text{e.v.n.}}{E}$, $\quad F : \underset{\text{int. de } \mathbb{R}}{I_0} \times \underset{\text{ouv. de } E}{U} \to E$

$y' = F(t;y)$

*R : Si l'on considère $y : I \to \mathbb{R}$

et $y'' = G(t;y;y')$ et $G : I_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

on peut intro. $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et l'éq. devient équiv. à

$$Y' = F(t;Y') \quad \text{où } F : I_0 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(X = (x_1;x_2)) \quad (t;X) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ G(t;x_1;x_2) \end{pmatrix}$$

Donc on peut ramener les éq. d'ordre > 1 du type $y^{(n)} = G(t;y;y';\dots;y^{(n-1)})$ (présentées

à une éq. du 1er ordre mais pour des inconnues à val. dans un esp. "plus gd.".

→ *

Attention : il peut y avoir une grosse diffé. qualitative entre des éq. du type

$y' = F(t;y)$ et $G(t;y;y') = 0$

cf. TD.

Exemples : $y : I \to \mathbb{R}$

$(E) : y' = ty$, $(F) : ty' = y$.

Toute sol. de (F) déf. près de 0 s'annule en 0.
Ce n'est pas le cas pour (E).

I Introduction au Théorème de Cauchy-Lipschitz.

* Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne des conditions suffisantes pour qu'une éq. diff. du 1er ordre du type :

$$(E) \quad y' = F(t;y) \quad \text{avec } y : \underset{\text{int. de } \mathbb{R}}{I} \to \underset{\text{ouv. d'un Banach } E}{V}$$

$$\text{et } F : \underset{\text{int. de } \mathbb{R}}{I_0} \times \underset{\text{ouv. de } E}{V} \to E$$

ait une solution <u>unique</u> au problème de Cauchy suivant : pour tout $t_0 \in I_0$, pour tout $y_0 \in V$, existe-t-il une sol. y de (E) t.q. $\boxed{y(t_0) = y_0}$? ← "condition initiale".

Dans ce cas, pour tout $(t_0;y_0) \in I_0 \times V$, il existe un int. ouv. J t.q. $t_0 \in J$ et $J \subset I_0$ et une sol. $\phi(\cdot;t_0;y_0) : J \to V$ de (E).

$$\text{Donc} \quad \phi : I_0 \times V \to \{ f : J \to V, \text{ conti.}, J \text{ int. de } \mathbb{R} \text{ inclus dans } I_0 \}$$
$$(t_0;y_0) \mapsto \phi(\cdot;t_0;y_0).$$

Un cas intéressant : qd. on peut prendre $J = I_0$.
—— très —— : qd. —— $J = I_0 = \mathbb{R}$.

* Différentes preuves du Th. de Cauchy-Lipschitz.

→ Utilisation de la méthode de Picard.

* voir Armandiès-Fraysse
voir le complément (dans le cas liné.)

* variante utilisant le théorème du point fixe. (voir compl.)

ici!

→ Approche plus concrète : dans le cours de Cartan (voir Cartan), p. 109

2019

~~Vers le Th. de Cauchy-Lipschitz.~~

~~On aborde le Th. par les étapes suivantes :~~

~~- notion de ε-solutions.~~

~~- Existence locale de ε-solutions.~~

~~- Existence globale ——— dans le cas linéaire.~~

~~- Prop. des ε-sol. dans le cas lipschitzien. (ne réf. à F).~~

~~- Th. d'existence locale de sol. ds le cas lipschitzien.~~

~~- Th. de Cauchy Lipschitz dans le cas lipschitzien~~

~~- ——— localement lipschitzien.~~

~~- ——— linéaire.~~

~~-~~

Préliminaires : * rappel sur les intégrales.

* compacité dans les e.v.n. (Cf. Analyse fonct.).