fermé dans le compact $[s_-;s_+]$ donc compact.
Il reste à montrer (*). On montre seulement $s_+ \in J$ (la preuve de l'autre prop. est similaire).
Par déf. de s_+, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \to s_+$. La suite $(\tilde{\alpha}(t_n))_n$ est une suite d'éléments du compact $\tilde{K}$ donc il existe φ inj. $\nearrow$ et $(t_\infty;y_\infty)\in\mathbb{R}\times F$ t.q. $\tilde{\alpha}(t_{\varphi(n)}) \longrightarrow (t_\infty;y_\infty)$. Comme $\tilde{K}$ est fermé, $(t_\infty;y_\infty) \in \tilde{K} \subset U$. Comme $t_{\varphi(n)} \to s_+$ et $t_{\varphi(n)} \to t_\infty$ on a $s_+ = t_\infty$. D'où $(s_+;y_\infty)\in U$.
Par C.L., $\Phi(\cdot, s_+; y_\infty)$ est au moins définie sur $[s_+-\varepsilon;s_+ +\varepsilon]$ pour un $\varepsilon>0$. Par le Cor. 1, pour $[0;b) = J$ ($\Lambda = \{t_0\}$), il existe $V\in\mathcal{V}_{(s_+;y_\infty)}$ t.q. pour $(\tau;\Gamma)\in V$, $\Phi(\cdot;\tau;\Gamma)$ est déf. sur $[s_+-\varepsilon;s_+ +\varepsilon]$.
Par ailleurs, il existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. $\tilde{\alpha}(t_{\varphi(n)})\in V$.
donc $\Phi(\cdot;t_{\varphi(n)};\alpha(t_{\varphi(n)}))$ est déf. sur $[s_+-\varepsilon;s_+ +\varepsilon]$.
Or $\Phi(\cdot;t_{\varphi(n)};\alpha(t_{\varphi(n)}))$ coïncide avec α en $t_{\varphi(n)}$ donc elles sont égales par C.L. Donc $[s_+-\varepsilon;s_+ +\varepsilon]\subset J$ par max. de α. D'où $s_+\in J$. $\square$

⚠ Si F est de dim. $<\infty$, $\mathbb{R}\times F$ l'est aussi et les compacts sont fermés et bornés. Mais ces deux prop. sont insuffisantes pour avoir la compacité, en général.
Ex : si F est de dim. ∞, alors, pour tout $a\in F$ et $r>0$, $B(a;r)$ n'est pas compacte

Th. des bouts (version rectangulaire).

Dans le cadre du Th. des bouts précédent, on suppose que $U = I \times V$ où I int. ouv., V ouv. de F.

Soit $(t_0; x_0) \in U$ et $\alpha : J \to F$ la sol. max. valant x_0 en t_0. On note $\alpha_\pm = \alpha_{|J \cap \{t;\, \pm(t-t_0) \geq 0\}}$.

(1^+). On suppose que $b_+ := \sup J \in I$. Alors, pour tout compact K inclu ds V, $\alpha_+^{-1}(K)$ est compact.

(1^-). On suppose que $b_- = \inf J \in I$. Alors, —, $\alpha_-^{-1}(K)$ —.

Preuve : On montre (1^+) seulement. On supp. $b_+ \in I$. Soit K un compact $\subset V$. Soit $\tilde{K} = [t_0; b_+] \times K$. C'est un compact inclu dans $U = I \times V$. Par le Th. des bouts précédent, $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$ est compact.
Or $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K}) = \alpha_+^{-1}(K)$ donc $\alpha_+^{-1}(K)$ est compact. □

Rq : * Dire que $b_+ \in I$, c'est dire que α n'est pas définie sur l'ens. non vide $I \cap [b_+; +\infty[$. Donc α n'est pas globalement déf. sur I.

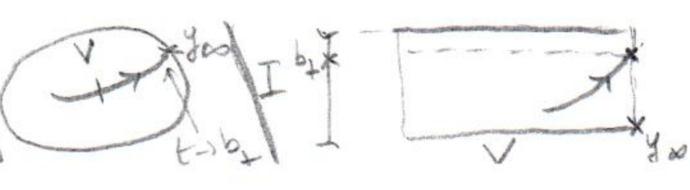
* Dans la pratique, on utilise souvent le Th. des bouts à travers l'un des corollaires qui suivent.

<u>Prop. 1</u>: Dans le cadre du Th. des bouts (Ugcq.) on suppose que $b_+ = \sup J \in \mathbb{R}$ et que $y_\infty = \lim\limits_{b^+} \alpha$ existe dans F. Alors $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U} \setminus U$.
Dans le cas particulier où $U = I \times V$ (I int. ouv. de $\mathbb{R}$ et V ouv. de F), en supposant de plus $b_+ \in I$, on a $y_\infty \in \overline{V} \setminus V$.

<u>Preuve</u> : Soit $\tilde{\alpha} : \begin{array}{l} J \longrightarrow U \\ t \mapsto (t ; \alpha(t)) \end{array}$. Par hyp. $\lim\limits_{b^+} \tilde{\alpha}$ existe et vaut $(b_+ ; y_\infty)$. Nécessairement $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U}$.
(par déf il existe $(t_n)_n \in J^{\mathbb{N}}$ tq. $t_n \to b_+$ et on a bien sûr $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(t_n) = y_\infty$ donc $(b_+ ; y_\infty)$ est limite d'une suite d'élé. de U. D'où $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U}$).

Supposons $(b_+ ; y_\infty) \in U$.
Par C.L., il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq. $\varphi_{(b_+ ; y_\infty)}$ est définie sur $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$. Par le cor. 1 avec $[a ; b] = [b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$ et $\varphi_{(t_0 ; Y_0)} = \varphi_{(b_+ ; y_\infty)}$, il existe un vois. V_0 de $(b_+ ; y_\infty)$ dans U tel que, pour tout $(\tau ; \Gamma) \in V_0$, $\varphi_{(\tau ; \Gamma)}$ est déf. sur $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$.
Comme $\lim\limits_{b^+} \tilde{\alpha} = (b_+ ; y_\infty)$, il existe $t' \in \,]b_+ - \varepsilon_0 ; b_+[$ tq. $\tilde{\alpha}(t') \in V_0$.
Donc $\varphi_{(t' ; \alpha(t'))}$ est déf. sur $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$. α et $\varphi_{(t' ; \alpha(t'))}$ coïncident en t' donc, par l'unicité de C.L., $\alpha = \varphi_{(t' ; \alpha(t'))}$.
En particulier, $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0] \subset J$. <u>Contr.</u> avec $b_+ = \sup J$.
Donc $(b_+ ; y_\infty) \notin U$. D'où $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U} \setminus U$.

On suppose que $U = I \times V$ et $b_+ \in I$. Comme $(b_+ ; y_\infty) \notin U$ et $b_+ \in I$, $y_\infty \notin V$. Comme $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U}$, il existe une suite $(t_n ; v_n)_n \in (I \times V)^{\mathbb{N}}$ tq. $t_n \to b_+$ et $v_n \to y_\infty$. Donc $y_\infty \in \overline{V}$.
D'où $y_\infty \in \overline{V} \setminus V$. $\square$



<u>Rq</u> : on peut montrer que la prop. 4 est une conséquence du Th. des bouts.

<u>Cor. 1</u> : Dans le cadre du Th. des bouts (avec U qcq.), on suppose que $b_+ \in \mathbb{R}$ et que

$$S := \sup_{t \in [t_0 ; b_+[} \| f(t ; \alpha(t)) \| < \infty .$$

Alors $y_\infty = \lim_{b_+} \alpha$ existe dans F. De plus, $(b_+ ; y_\infty) \in \overline{U} \setminus U$.

Dans le cas particulier où $U = I \times V$ et $b_+ \in I$, on a $y_\infty \in \overline{V} \setminus V$.

<u>Preuve</u> : Pour $(s ; t) \in [t_0 ; b_+[^2$, on a

$$\| \alpha(t) - \alpha(s) \| = \left\| \int_s^t f(t' ; \alpha(t'))\, dt' \right\| \leq \left| \int_s^t \| f(t' ; \alpha(t')) \| \, dt' \right|$$

$$\leq S \left| \int_s^t dt' \right| = S\, |t - s| .$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{S+1}$. Soit $(t ; s) \in (J \cap]b_+ - \delta ; b_+[)^2$.

On a, d'après l'inég. précéd. $\| \alpha(t) - \alpha(s) \| \leq S |t - s| < S \times \delta \leq \varepsilon$.

Donc α vérifie le critère de Cauchy en b_+.

Comme F est complet, $y_\infty := \lim_{b_+} \alpha$ existe dans F.

Le reste des affirmations du Cor. 1 découlent de l'appl. de la prop. 1. $\square$

<u>Rq</u> : L'argument utilisé ci-dessus ne marche pas si $b_+ = +\infty$: Dans ce cas, lorsque $(t ; s) \in (J \cap]b_+ - \delta ; b_+[)^2$, on ne peut affirmer que $|s - t| < \delta$. Il marcherait cependant si l'on supposait que $\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^t \| f(s ; \alpha(s)) \| \, ds$ existe ds $\mathbb{R}^+$.

Cor. 2 : Dans le cadre du Th. des bouts avec $U = I \times F$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$, et f bornée. On a $J = I$.

Preuve : Comme f est bornée, on peut appliquer le cor. 1 dans la version rectangulaire. Si $b_+ \in I$ alors $\lim_{+\infty} \alpha \in \overline{F} \setminus F = \emptyset$. Contr. Donc $b_+ \notin I$ et $b_+ \geq \sup I$. De m. $b_- \notin I$ et $b_- \leq \inf I$.
D'où $J = I$. $\square$.

Rq. : Les sol. max. ne peuvent s'échapper de F donc elles doivent "vivre" infiniment.

Cor. 3 : Dans le cadre du Th. des bouts avec $U = I \times F$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$, on suppose qu'il existe une fonct. conti. $L : I \to \mathbb{R}^+$ tq.

$$\forall t \in I, \forall (x; x') \in F^2, \ \|f(t;x) - f(t;x')\| \leq L(t) \|x - x'\|.$$

Alors $J = I$.

Rq : Ce corollaire s'applique dans le cas "linéaire" vu précédemment et redonne le fait que les sol. sont déf. sur I.

Preuve du cor. 3 : On suppose $b_+ \in I$. Il existe donc $t_1 \in I$ tq. $[t_0; b_+[\subset [t_0; t_1] \subset I$. Soit $\tilde{L} = \sup_{[t_0;t_1]} L < \infty$. Comme $f(\cdot; x_0)$ est conti. sur le compact $[t_0; t_1]$,

$$\tilde{M} := \sup_{t \in [t_0;t_1]} \|f(t;x_0)\| < \infty.$$

Pour $t \in [t_0; b_+[$, on a

$$\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| = \|\alpha(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s;\alpha(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s;\alpha(s))\| ds.$$

Donc

$$\|\alpha(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s;\alpha(s)) - f(s;x_0)\| ds + \int_{t_0}^t \|f(s;x_0)\| ds$$

$$\leq \int_{t_0}^t L(s) \|\alpha(s) - x_0\| ds + \tilde{M}(t - t_0)$$

$$\leq \tilde{L} \int_{t_0}^t \|\alpha(s) - x_0\| ds + \underbrace{\tilde{M}(b_+ - t_0)}_{\tilde{A}}.$$

Par Gronwall, on a, pour $t\in[t_0;b_+[$,
$\|\alpha(t)-x_0\| \leq \tilde{C}\, e^{\tilde{L}(t-t_0)} \leqslant \tilde{C}\, e^{\tilde{L}(b_+-t_0)} =: \tilde{A}$.
Pour $(s;t)\in[t_0;b_+[^2$, on a, comme précédemment,
$\|\alpha(t)-\alpha(s)\| \leq \left|\int_s^t \|f(u;\alpha(u))\|du\right| \leq \left|\int_s^t \|f(u;\alpha(u))-f(u;x_0)\|du\right| + \left|\int_s^t \|f(u;x_0)\|du\right|$

(*) $\leq \left|\int_s^t L(u)\,\|\alpha(u)-x_0\|du\right| + \tilde{M}|t-s| \leqslant (\tilde{L}\times A+\tilde{M})\,|t-s|$.

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\tilde{L}\tilde{A}+\tilde{M}+1}$. Pour $(t;s)\in J^2$ avec $b_+-\delta<s<b_+$ et $b_+-\delta<t<b_+$, on a, $|t-s|<\delta$ et, par (*), (cf. $b_+\in\mathbb{R}$!)
$\|\alpha(t)-\alpha(s)\| \leqslant (\tilde{L}\tilde{A}+\tilde{M})\,|t-s| < \varepsilon$.
Donc α vérifie le critère de Cauchy en b_+ dans le complet F. Donc $\lim_{b_+}\alpha$ existe dans F. Par la prop. 1, $\lim_{b_+}\alpha\in\overline{F}\setminus F$.
Contr. Donc $b_+\notin I$.
De m., on montre que $b_-\notin I$. D'où $J=I$. □.

Voyons maintenant 3 résultats propres à la dimension finie. On peut montrer qu'ils sont faux en général en dim. ∞.

Prop. 2 : Dans le cadre du Th. des bouts avec $U=I\times F$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$ et $\dim F<\infty$, si $b_+\in I$ alors
$\lim_{t\to b_+}\|\alpha(t)\| = +\infty$ et $\sup_{t\in[t_0;b_+[}\|f(t;\alpha(t))\| = +\infty$.

Preuve : Soit $r>0$. Comme $\dim F<\infty$, $B[x_0;r]$ est un compact. Par le Th. des bouts, $\alpha_+^{-1}(B[x_0;r])$ est un compact inclu dans J. Soit $t_1 = \sup\alpha_+^{-1}(B[0;r])$. On a donc $t_0\leqslant t_1<b_+$ et
$(t\in J$ et $t>t_1) \Longrightarrow \alpha(t)\notin B[x_0;r]$.
On a montré que $\lim_{b_+}\|\alpha\| = +\infty$.
Pour $t\in[t_0;b_+[$, $\alpha(t)-x_0 = \int_{t_0}^t f(s;\alpha(s))ds$ donc