$$\|\alpha(t)\| \leq \|x_0\| + (t-t_0) \sup_{s\in[t_0;b_+[} \|f(s;\alpha(s))\|$$

et

$$\|\alpha(t)\| \leqslant \|x_0\| + \underbrace{(b_+-t_0)}_{>0} \sup_{s\in[t_0;b_+[} \|f(s;\alpha(s))\| .$$

Comme $\lim_{b_+} \|\alpha\| = +\infty$, $\sup_{s\in[t_0;b_+[} \|f(s,\alpha(s))\| = +\infty$. $\square$

Rq. : on a un résultat similaire pour b_-.

Cor. 4 : Dans le cadre du Th. des bouts avec $U = I\times F$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$ et dim $F<\infty$, on suppose qu'il existe une fonct. conti. $g : I\cap[t_0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ t.q.

$$\forall t\in[t_0;b_+[,\quad \|\alpha(t)\| \leq g(t).$$

Alors $b_+ = \sup I$.

Rq. : on a un résultat similaire pour b_-.

Preuve : On supp. $b_+\in I$. Pour tout $t\in[t_0;b_+[$,

$$\|\alpha(t)\| \leq \sup_{t\in[t_0;b_+]} g(t) < \infty$$

car g est conti. sur le compact $[t_0;b_+]$. On a donc une contr. avec la prop. 2. Donc $b_+\notin I$ et $\sup I = b_+$. $\square$

Rq. : l'hyp. dim $F<\infty$ est utilisée à travers la prop. 2.

Cor. 5 : Dans le cadre du Th. des bouts avec $U = I\times V$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$, V ouv. de F, $V\neq F$ et dim $F<\infty$, on suppose qu'il existe deux fonct. conti. $g : I\cap[t_0;+\infty[\to \mathbb{R}^+$ et $h : I\cap[t_0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$\forall t\in[t_0;b_+[,\ \|\alpha(t)\| \leq g(t) \text{ et } d(\alpha(t);\bar{V}\setminus V) \geq h(t) > 0,$$

où, pour $e\in F$, $d(e;\bar{V}\setminus V) = \inf\{\|e-v\| ; v\in\bar{V}\setminus V\}$.

Alors $b_+ = \sup I$.

Rq. : on a un résultat similaire pour b_-.

Preuve : On supp. $b_+ \in I$. Pour $(s;t) \in [t_0;b_+[^2$, on a

$$\|\alpha(t)-\alpha(s)\| \leq \sup_{s\in[t_0;b_+[} \|f(s;\alpha(s))\| \times |t-s|.$$

Or $\sup_{t\in[t_0;b_+[} \|\alpha(t)\| \leq \sup_{t\in[t_0;b_+]} \|g(t)\| =: M < \infty$

car g est conti. sur le compact $[t_0;b_+]$.

Comme f est conti. sur le compact $K=[t_0;b_+]\times B(0;M]$,

$$\sup_{s\in[t_0;b_+[} \|f(s;\alpha(s))\| \leq \sup_K \|f\| = M' < \infty.$$

Donc, pour $(s;t)\in[t_0;b_+[^2$,

$$\|\alpha(t)-\alpha(s)\| \leq M' |t-s|.$$

Comme précédemment, on montre que α vérifie le critère de Cauchy en b_+. Comme $\dim F<\infty$, F est complet et $l_\infty := \lim_{b_+} \alpha$ existe dans F. Par la prop. 1, $y_\infty \in \overline{V}\setminus V$.

Pour tout $t\in[t_0;b_+[$,

$$\|\alpha(t)-y_\infty\| \geq d(\alpha(t);\overline{V}\setminus V) \geq h(t)$$

et, comme h est conti. et str. >0 sur le compact $[t_0;b_+]$,

$$h(t) \geq \inf_{s\in[t_0;b_+]} h(s) =: h_0 > 0.$$

Donc, pour $t\in[t_0;b_+[$, $\|\alpha(t)-y_\infty\| \geq h_0 > 0$. Par passage à la limite $t\to b_+$ dans les inég., on obtient la contr. $0 \geq h_0 > 0$. Donc $b_+ \notin I$ et $\sup I = b_+$. □

6 - Dépendance régulière par rapport à des paramètres.

Dans le cadre du paragraphe 4, on veut étudier la régularité de flot en fonct. de celle de $\tilde{f}$.

On commence par un cas particulier avant de généralis. à la situation du para. 4.

Prop. 5 : Soit $(F; \|\cdot\|)$ un esp. de Banach, soit V un ouvert de F et $\tilde{f} : V \longrightarrow F$ de classe C^r (avec $r \in \mathbb{N}^*$). On suppose que C.L. s'applique à l'éq. (E) : $y' = \tilde{f}(y)$. Soit $\Omega_0 = \{(s; y_0) \in \mathbb{R} \times V ; s \in J_{(0;y_0)}\}$ où $J_{(0;y_0)}$ est l'intervalle de déf. de la sol. max. $\phi(\cdot; 0; y_0)$ valant y_0 en $t = 0$. Alors

1). Ω_0 est ouvert.

2). L'application $\tilde{\Phi} : \begin{array}{l} \Omega_0 \longrightarrow F \\ (s; y_0) \longmapsto \phi(s; 0; y_0) \end{array}$ est C^r;

3). Pour $y_0 \in V$, l'appl. $Z_0 : J_{(0;y_0)} \ni t \longmapsto \underbrace{D_x\phi(t; 0; y_0)}_{= D_x\tilde{\Phi}(t;y_0)} \in \mathcal{L}_c(F)$ est C^1 et solution de l'éq. linéai. d'inconnue $J(0;y_0) \ni t \longmapsto M(t) \in \mathcal{L}_c(F)$ donnée par

$$\text{(Var.)} \qquad M'(t) = D_x\tilde{f}\left(\phi(t; 0; y_0)\right) \circ M(t).$$

avec $D_x\phi(0; 0; y_0) = Id_F$. De plus, $\tilde{\Phi}$ est C^1.

Rq : * $\mathcal{L}_c(F)$ est l'espace de Banach des appl. $\mathbb{R}$-linéaires conti. sur F.

* Dans l'éq. (Var.), on a, à droite la composition d'appl. $\mathbb{R}$-liné. conti., puisque, par déf., $D_x\tilde{f}(a) \in \mathcal{L}_c(F)$ pour $a \in V$. Comme $C : \mathcal{L}_c(F)^2 \to \mathcal{L}_c(F)$, $(U;V) \mapsto U \circ V$ est bili. conti., l'appl. $\tilde{C} : \mathcal{L}_c(F) \to \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(F))$ déf. par $\tilde{C}(U) \doteq C(U;\cdot)$ est liné. conti. Comme $\tilde{f}$ est C^1, $D_x\tilde{f}$ est conti., donc $\tilde{C} \circ D_x\tilde{f} : V \to \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(F))$ aussi. Comme $\phi(\cdot;0;y_0)$ est conti. $\tilde{C} \circ D_x\tilde{f} \circ \phi(\cdot;0;y_0)$ est conti. à val. ds $\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(F))$. Comme (Var.) est une éq. diff. associée à J, C.L. liné. s'applique à (Var.), qui est appelée équation aux variations associée à $\tilde{f}$ en $(0;y_0)$.

* On peut deviner (retrouver) (Var.) de la façon suivante : En supposant $\tilde{f}$ et ϕ assez régulières, on part de

$$(\partial_t\phi)(t;0;y_0) = \tilde{f}\big(\phi(t;0;y_0)\big)$$

et différentier par rapport à x (la deuxième var. de $\tilde{f}$). On obtient :

$$D_x(\partial_t\phi)(t;0;y_0) = (D_x\tilde{f})\big(\phi(t;0;y_0)\big) \circ (D_x\phi)(t;0;y_0) \quad (\text{dans } \mathcal{L}_c(F)).$$

$$\| \quad \partial_t(D_x\phi)(t;0;y_0).$$

Donc $(D_x\phi)(\cdot;0;y_0)$ est la sol. de (Var.).

<u>Preuve de la prop. 5</u> :

1). cf. le cor. 2. (avec $\Lambda = \{\lambda_0\}$). On a aussi la conti. de $\tilde{\Phi}$.

3). Supposons qu'on ait montré que, pour tout $(s;y_0) \in \Omega_0$, $D_x\tilde{\Phi}(s;y_0) = (D_x\phi)(s;0;y_0)$ existe et que $D_x\tilde{\Phi}(\cdot;y_0)$ est la sol. du pb. de Cauchy d'inconnue $Z : J(0;y_0) \ni t \mapsto Z(t) \in \mathcal{L}_c(F)$ donné par

$$(C) \begin{cases} \forall t \in J(0;y_0), & Z'(t) = (D_x\tilde{f})\big(\tilde{\Phi}(t;y_0)\big) \circ Z(t), \\ Z(0) = id_F. \end{cases}$$

Comme sol. d'une éq. liné., $D_x\tilde{\Phi}$ est conti. (cf. conti. du flot). Comme $\partial_t\tilde{\Phi} = \tilde{f} \circ \tilde{\Phi}$, elle est aussi conti. Donc $\tilde{\Phi}$ est C^1 et on a 3).

Soit I un sous-int. compact de $J(0;y_0)$, qui est un vois. de 0. Par le cor. 2., il existe $\rho_0 > 0$ tq., pour $h \in F$ avec $\|h\| < \rho_0$, $\phi(\cdot;0;y_0+h)$ est définie sur I et $\sup_{s \in I} \|\phi(s;0;y_0+h) - \phi(s;0;y_0)\| = o(1)$, qd $h \to 0$. Pour $s \in I$ et $h \in F$ avec $\|h\| < \rho_0$, soit

$$V(s) = \Psi(s;y_0+h) - \Psi(s;y_0) - Z_0(s).h \quad \text{et} \quad A(s) = (D_x\tilde{f})\big(\Psi(s;y_0)\big)$$

où Z_0 est la sol. du pb. (C).

Lemme 1 : Pour $h \in F$ avec $\|h\| < \rho_0$, on a

$$\sup_{s \in I} \| V'(s) - A(s) V(s) \| = o(\|h\|), \text{ qd } h \to 0.$$

Admettons provisoirement ce lemme. On a alors, pour $\|h\| < \rho_0$ et $s \in I$,

$$\|V(s)\| = \| V(s) - V(0) \| = \left\| \int_0^s V'(u)\, du \right\|$$

$$= \left\| \int_0^s (V'(u) - A(u)V(u))\, du + \int_0^s A(u)V(u)\, du \right\|$$

$$\leq \left| \int_0^s \|V'(u) - A(u)V(u)\|\, du \right| + \left| \int_0^s \|A(u)V(u)\|\, du \right|$$

$$\leq \sup_{u \in I} \|V'(u) - A(u)V(u)\| \cdot |s| + \left| \int_0^s \|A(u)\|_0 \cdot \|V(u)\|\, du \right|$$

$$\leq \operatorname{long}(I) \times \underbrace{\sup_{u \in I} \|V'(u) - A(u)V(u)\|}_{o(\|h\|)} + \underbrace{\sup_{u \in I} \|D_2 \tilde{f}(\psi(u; y_0))\|}_{M} \times \left| \int_0^s \|V(u)\|\, du \right|.$$

$$\leq o(\|h\|) + M \times \left| \int_0^s \|V(u)\|\, du \right|.$$

avec $M < \infty$ car $D_x \tilde{f}(\psi(\cdot\,; y_0))$ est conti. sur le compact I.

Par Gronwall, pour $s \in I$, on a

$$\|V(s)\| \leq o(\|h\|) \times e^{M \operatorname{long}(I)} = o(\|h\|), \text{ qd } h \to 0.$$

Donc, pour tout $s \in I$, $\psi(s; \cdot)$ est différentiable en y_0 et

$$D_x \psi(s; y_0) = Z_0(s).$$

Preuve du Lemme 1 : Pour $s \in I$ et $\|h\| < \rho_0$,

$$V'(s) - A(s)V(s) = \partial_1 \psi(s; y_0+h) - \partial_1 \psi(s; y_0) - Z_0'(s) \cdot h - A(s)\big(\psi(s; y_0+h) - \psi(s; y_0) - Z_0(s) h\big)$$

$$= \tilde{f}(\underbrace{\psi(s; y_0+h)}_{x}) - \tilde{f}(\underbrace{\psi(s; y_0)}_{x_1}) - \cancel{A(s) Z_0(s)} - A(s)\big(\psi(s; y_0+h) - \psi(s; y_0) - \cancel{Z_0(s) h}\big)$$

$$= \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_1) - A(s)(x - x_1) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_1) - (D_x \tilde{f})(x_1) \cdot (x - x_1).$$