où Z_0 est la sol. du pb. (C).

Lemme 1 : Pour $h \in F$ avec $\|h\| < \rho_0$, on a

$$\sup_{s \in I} \| V'(s) - A(s) V(s) \| = o(\|h\|), \text{ qd } h \to 0.$$

Admettons provisoirement ce lemme, on a alors, pour $\|h\| < \rho_0$ et $s \in I$, comme $V(0) = y_0 + h - y_0 - h = 0$,

$$\|V(s)\| = \|V(s) - V(0)\| = \left\| \int_0^s V'(u)\,du \right\|$$

$$= \left\| \int_0^s (V'(u) - A(u)V(u))\,du + \int_0^s A(u)V(u)\,du \right\|$$

$$\leq \left| \int_0^s \|V'(u) - A(u)V(u)\|\,du \right| + \left| \int_0^s \|A(u)V(u)\|\,du \right|$$

$$\leq \sup_{u \in I} \|V'(u) - A(u)V(u)\| \cdot |s| + \left| \int_0^s \|A(u)\|_0 \cdot \|V(u)\|\,du \right|$$

$$\leq \text{long}(I) \times \underbrace{\sup_{u \in I} \|V'(u) - A(u)V(u)\|}_{o(\|h\|)} + \underbrace{\sup_{u \in I} \|D_2 \tilde{f}(\Psi(u; y_0))\|}_{M} \times \left| \int_0^s \|V(u)\|\,du \right|.$$

$$\leq o(\|h\|) + M \times \left| \int_0^s \|V(u)\|\,du \right|,$$

avec $M < \infty$ car $D_2\tilde{f}(\Psi(\cdot\,; y_0))$ est conti. sur le compact I. ✓

Par Gronwall, pour $s \in I$, on a

$$\|V(s)\| \leq o(\|h\|) \times e^{M \,\text{long}(I)} = o(\|h\|), \text{ qd } h \to 0.$$

Donc, pour tout $s \in I$, $\Psi(s; \cdot)$ est différentiable en y_0 et

$D_2\Psi(s; y_0) = Z_0(s)$. ($\tilde{f}$ lipsch. sur un vois. de l'image de $\Psi(\cdot\,; y_0)|_I$)

voir 65 bis

Preuve du Lemme 1 : Pour $s \in I$, et $\|h\| < \rho_0$,

$$V'(s) - A(s)V(s) = \partial_1\Psi(s; y_0 + h) - \partial_1\Psi(s; y_0) - Z_0'(s) \cdot h - A(s)\left(\Psi(s; y_0+h) - \Psi(s; y_0) - Z_0(s) h\right)$$

$$= \tilde{f}(\underbrace{\Psi(s; y_0+h)}_{x}) - \tilde{f}(\underbrace{\Psi(s; y_0)}_{x_1}) - \cancel{A(s) Z_0(s)} - A(s)\left(\Psi(s; y_0+h) - \Psi(s; y_0) - \cancel{Z_0(s) h}\right)$$

$$= \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_1) - A(s)(x - x_1) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_1) - (D_2\tilde{f})(x_1) \cdot (x - x_1),$$

Comme $\tilde{f}$ est loca. lipsch., pour $s \in I$ il existe $\rho_s \in]0;\rho_0]$ et $L_s > 0$ tq.

$\forall (x;x') \in B(\psi(s;y_0);\rho_s[^2$, $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leq L_s \|x - x'\|$.

Comme $\psi(\cdot;y_0)$ est conti. sur I, pour $s \in I$ il existe $\tau_s > 0$ tq.

$$|s' - s| < \tau_s \Rightarrow \|\psi(s';y_0) - \psi(s;y_0)\| < \tfrac{1}{2}\rho_s.$$

On a

$$\mathrm{Gr}\,\psi(\cdot;y_0)_{|I} = \{(s;\psi(s;y_0))\,;\, s \in I\} \subset \bigcup_{s \in I}]s - \tau_s; s + \tau_s[\times B(\psi(s;y_0);\rho_s[$$

Comme $\mathrm{Gr}\,\psi(\cdot;y_0)_{|I}$ est l'image du compact I par l'appl. conti. $I \ni s \longmapsto (s;\psi(s;y_0))$, il est compact. Donc il existe $s_1, \ldots, s_n$ dans I tq.

$$\mathrm{Gr}\,\psi(\cdot;y_0)_{|I} \subset \bigcup_{j=1}^{n}]s_j - \tau_{s_j}; s_j + \tau_{s_j}[\times B(\psi(s_j;y_0);\rho_{s_j}[.$$

Soit $\rho = \min_{1 \leq j \leq n} \tfrac{1}{2}\rho_{s_j} \leq \rho_0$ et $L = \max_{1 \leq j \leq n} L_{s_j}$.

Pour $s \in I$ et $(x;x') \in B(\psi(s;y_0);\rho[$, il existe $1 \leq j \leq n$ tq. $|s - s_j| < \tau_{s_j}$ donc

$$\|x - \psi(s_j;y_0)\| \leq \|x - \psi(s;y_0)\| + \|\psi(s;y_0) - \psi(s_j;y_0)\| < \rho_{s_j}.$$

Donc $x \in B(\psi(s_j;y_0);\rho_{s_j}[$. De m. $x' \in B(\psi(s_j;y_0);\rho_{s_j}[$.

Donc

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leq L_{s_j}\|x - x'\| \leq L\|x - x'\|.$$

Par le cor. 2, il existe $\rho' \in]0;\rho]$ tq., pour $\|h\| < \rho'$, pour tout $s \in I$, $\|\psi(s;y_0+h) - \psi(s;y_0)\| < \rho$ donc

$$\|\tilde{f}(\psi(s;y_0+h)) - \tilde{f}(\psi(s;y_0))\| < L\|\psi(s;y_0+h) - \psi(s;y_0)\|.$$

Soit $g : [0;1] \to F$ donnée par $g(t) = \tilde{f}(tx + (1-t)x_1)$; g est C^1 et $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$. Donc

$$V'(s) - A(s)V(s) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_1) - (D_x\tilde{f})(x_1).(x - x_1) = g(1) - g(0) - (D_x\tilde{f})(x_1)(x - x_1)$$

$$= \int_0^1 (D_x\tilde{f})(ux + (1-u)x_1).(x - x_1)\,du - (D_x\tilde{f})(x_1).(x - x_1)$$

$$= \int_0^1 (D_x\tilde{f})(ux + (1-u)x_1)\,du\,.(x - x_1) - \left(\int_0^1 (D_x\tilde{f})(x_1)\,du\right).(x - x_1)$$

$$= \int_0^1 (D_x\tilde{f}(ux + (1-u)x_1) - D_x\tilde{f}(x_1))\,du\,.(x - x_1).$$

Donc

$$\|V'(s) - A(s)V(s)\| \leq M(h).\|x - x_1\| \qquad (0)$$

où $M_s(h) = \sup_{u \in [0;1]} \|(D_x\tilde{f})(ux + (1-u)x_1) - (D_x\tilde{f})(x_1)\|_0$.

$$= \sup_{u \in [0;1]} \|(D_x\tilde{f})(u\varphi(s;y_0+h) + (1-u)\varphi(s;y_0)) - (D_x\tilde{f})(\varphi(s;y_0))\|_0.$$

On rappelle que $\tilde{f}$ est L-lipschitz sur $\bigcup_{s \in I} \bar{B}(\varphi(s;y_0);\rho[$.

Donc, pour tout $s \in I$, pour $\|h\| < \rho' \leq \rho < \rho_0$,

$$\|x - x_1\| = \|\varphi(s;y_0+h) - \varphi(s;y_0)\| = \left\|h + \int_0^s [\tilde{f}(\varphi(u;y_0+h)) - \tilde{f}(\varphi(u;y_0))]du\right\|$$

$$\leq \|h\| + \left|\int_0^s \|\tilde{f}(\varphi(u;y_0+h)) - \tilde{f}(\varphi(u;y_0))\|du\right|$$

$$\leq \|h\| + L\left|\int_0^s \|\varphi(u;y_0+h) - \varphi(u;y_0)\|du\right|.$$

Par Gronwall,

$$\|x - x_1\| = \|\varphi(s;y_0+h) - \varphi(s;y_0)\| \leq e^{L \times \mathrm{long}(I)}\|h\| =: c_0\|h\| \quad (1).$$

<u>Lemme 2</u> : $\sup_{s \in I} M_s(h) = o(1)$ qd. $h \to 0$.

Admettons provisoirement ce lemme. On a alors, par (0) et (1),

$$\sup_{s \in I} \|V'(s) - A(s)V(s)\| = o(\|h\|),$$

ce qui termine la preuve du Lemme 1.

<u>Preuve du lemme 2</u> : Soit $s \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la conti. de $D_x\tilde{f}$ en $x_1 = \varphi(s;y_0)$, il existe $r_s > 0$ tq.

$$\|x' - x_1\| < r_s \Longrightarrow \sup_{t\in[0;1]} \|(D_x\tilde{f})(tx' + (1-t)x_1) - (D_x\tilde{f})(\underbrace{x_1}_{\psi(s;y_0)})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Comme $\psi(\cdot\,;y_0)$ est conti. au point s, il existe $\delta_s > 0$ tq.

$$|s' - s| < \delta_s \Longrightarrow \|\psi(s';y_0) - \psi(s;y_0)\| < \frac{r_s}{4}. \quad (3).$$

On montre l'implication,

$$\left.\begin{array}{l} |s'-s| < \delta_s \\ \text{et} \\ \|x' - \underbrace{x_1}_{\psi(s;y_0)}\| < \frac{r_s}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sup_{t\in[0;1]} \|(D_x\tilde{f})(tx' + (1-t)\overbrace{\psi(s';y_0)}^{x_1'}) - (D_x\tilde{f})(\overbrace{\psi(s';y_0)}^{x_1'})\| < \varepsilon. \quad (4)$$

Soit $|s'-s| < \delta_s$ et $\|x' - x_1\| < \frac{r_s}{2}$. Soit $x_1' = \psi(s';y_0)$. Par (3), on a

$\|x_1' - x_1\| < \frac{r_s}{4}$. Donc, par (2) avec $x' = x_1'$,

$$\|(D_x\tilde{f})(x_1') - (D_x\tilde{f})(x_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, pour $t \in [0;1]$, on a

$$\|tx' + (1-t)x_1' - x_1\| = \|t(x' - x_1') + x_1' - x_1\|$$
$$\leq t\|x' - x_1'\| + \|x_1' - x_1\| \leq \|x' - x_1\| + 2\|x_1 - x_1'\| < r_s.$$

Donc par 2) avec x' remplacé par $tx' + (1-t)x_1'$, on a

$$\|(D_x\tilde{f})(tx' + (1-t)x_1') - (D_x\tilde{f})(x_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\|(D_x\tilde{f})(tx' + (1-t)x_1') - (D_x\tilde{f})(x_1')\|$$
$$\leq \|(D_x\tilde{f})(tx' + (1-t)x_1') - (D_x\tilde{f})(x_1)\| + \|(D_x\tilde{f})(x_1) - (D_x\tilde{f})(x_1')\|$$
$$\leq \varepsilon.$$

On a montré (4).

Comme I est compact et $I \subset \bigcup_{s\in I}]s - \delta_s; s + \delta_s[$,

il existe $s_1, \dots, s_n \in I$ tq.

$$I \subset \bigcup_{j=1}^{n}]s_j - \delta_{s_j}; s_j + \delta_{s_j}[.$$