Soit $r = \min (r_{s_j}) > 0$. Soit $s \in I$ et $x' \in B(x_1 ; \frac{r}{4}[$
(avec $x_1 = \Psi(s; y_0)$). Il existe $j \in [1; n] \cap \mathbb{N}$ t.q.
$s \in]s_j - \delta_{s_j} ; s_j + \delta_{s_j}[$.
De plus, par (3),

$$\|x' - \Psi(s_j ; y_0)\| \leq \|x' - x_1\| + \|x_1 - \Psi(s_j ; y_0)\|$$
$$< \frac{r}{4} + \frac{r_{s_j}}{4} \leq \frac{r_{s_j}}{2}.$$

Par (4) avec s remplacé par s_j, s' remplacé par s,

$$\sup_{t \in [0;1]} \|(D_x \tilde f)(t x' + (1-t)\underbrace{\Psi(s;y_0)}_{x_1}) - (D_x \tilde f)(\underbrace{\Psi(s;y_0)}_{x_1})\| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Soit $h \in F$ t.q. $\|h\| < \min(\rho, \frac{r}{4C})$. Pour $s \in I$, on a, par (1),

$$\|\Psi(s; y_0 + h) - \Psi(s; y_0)\| = \|x - x_1\| \leqslant C\|h\| < \frac{r}{4}$$

lors on a (5) pour $x' = x = \Psi(s; y_0, +h)$ soit $\sup_s M_s(h) \leqslant \varepsilon$. D'où $\sup_s M_s(h) = o(1)$, qd. $h \to 0$.
Cela termine la preuve du lemme 2 et aussi celle du
point 3 de la prop. 5.
Il reste à montrer le point 2).
On procède par récu. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $S(p)$:
Pour tout les ég. diff. associée à une fonct. $\tilde f$ de
classe C^p et vérifiant C.L., $\tilde\Phi$ est de classe C^p.
$S(1)$ est vraie d'après le 3). Supp. $S(p)$
vraie et prenons une ég. diff. associée à une
fonct. $\tilde f$ de classe C^{p+1} et vérifiant C.L. Comme
$D_x \tilde f$ est de classe C^p, l'hyp. de récu. appliquée à (Var)
montre que $D_x \tilde\Phi$ est C^p. Comme $\partial_t \tilde\Phi = \tilde f \circ \tilde\Phi$,
$\partial_t \tilde\Phi$ est aussi C^p. D'où $D\tilde\Phi$ est C^p. On en déduit
que $\tilde\Phi$ est C^{p+1}. Par le th. de récu., 2) est vraie. □

Prop. 6 : Sous les conditions de la prop. 5, soit

$$\Omega = \{(t;t_0;y_0) \in \mathbb{R}^2 \times F;\ t \in J(t_0;y_0)\}.$$

1). Ω est ouvert.

2). L'appl. $\begin{array}{rcl}\phi : \Omega & \longrightarrow & F \\ (t;t_0;y_0) & \longmapsto & \varphi_{(t_0;y_0)}(t)\end{array}$ est C^r.

3). Pour tout $(t_0;y_0) \in \mathbb{R} \times F$, l'appl.

$$\begin{array}{rcl} Z : J(t_0;y_0) & \longrightarrow & \mathcal{L}_c(F) \\ t & \longmapsto & (D_x\phi)(t;t_0;y_0)\end{array}$$

est C^1, est sol. de l'éq. diff. liné. d'inconnue $M : J \to \mathcal{L}_c(F)$ donnée par

$$(\text{Var.}) \quad \forall t \in J, \quad M'(t) = (D_x\tilde{f})(\phi(t;t_0;y_0)) \circ M(t)$$

et vérifie $Z(t_0) = id_F$.

Preuve : Soit $(t_0;y_0) \in \mathbb{R} \times V$. Les fonct.

$$\{u \in \mathbb{R};\ t_0 + u \in J_{(t_0;y_0)}\} \ni s \longmapsto \phi(t_0+s;t_0;y_0) \in F$$

et

$$J_{(0;y_0)} \ni s \longmapsto \phi(s;0;y_0) \in F$$

sont des sol. max. de (E) et coïncident en $s=0$. Elles sont donc égales par C.L. Donc

$$J_{(t_0;y_0)} = \{t \in \mathbb{R};\ t - t_0 \in J_{(0;y_0)}\} \text{ et } \left((t;t_0;y_0) \in \Omega \Leftrightarrow (t-t_0;y_0) \in \Omega_0\right).$$

Comme Ω_0 est ouvert par la prop. 5, Ω l'est aussi.

Sur Ω, on a

$$\phi(t_0+s;t_0;y_0) = \phi(s;0,y_0) = \tilde{\phi}(s;y_0).$$

Par la prop. 5, $\tilde{\phi}$ est C^r donc ϕ l'est aussi.

De plus, sur Ω, $(D_x\phi)(t_0+s;t_0;y_0) = (D_x\tilde{\phi})(s;y_0)$.

Par la prop. 5, 3), on obtient la 3). $\square$

Rq. : Dans le cas où $\Omega_0 = \mathbb{R}\times V$, $\Omega = \mathbb{R}^2\times V$ et l'appl. $\underline{\Phi} : \mathbb{R} \longrightarrow \{ g : V \longrightarrow V \}$

$$t \longmapsto \phi(t;0;\cdot) = \psi(t;\cdot)$$

vérifie, pour tout $(s;t)\in\mathbb{R}^2$,

$$\underline{\Phi}(t)\circ\underline{\Phi}(s) = \underline{\Phi}(t+s).$$

En effet, pour tout $y_0\in V$

$t\longmapsto\phi(t+s;0;y_0)$ et $t\longmapsto\phi(t;0;\phi(s;0;y_0))$ coïncident en $t=0$ donc elles coïncident partout.

Donc $\phi(t+s;0;\cdot) = \phi(t;0;\phi(s;0;\cdot))$ soit

$$\underline{\Phi}(t+s) = \underline{\Phi}(t)\circ\underline{\Phi}(s).$$

On traite maintenant le cas général.

<u>Th. (régularité du flot)</u>:

Soit $(F,\|\cdot\|)$ un Banach. Soit U un ouv. de $\mathbb{R}\times F$ et $f : U\longrightarrow F$ de classe C^r, pour un $r\in\mathbb{N}^*$, t.q. le Th. de C.L. s'applique à l'éq. (E) associée à f. Soit

$\Omega = \{(t;t_0;y_0)\in\mathbb{R}\times U ;\ t\in J(t_0;y_0)\}$ et

$$\phi : \begin{array}{l}\Omega \longrightarrow F \\ (t;t_0;y_0)\longmapsto \varphi_{(t_0;y_0)}(t)\end{array}.$$

Alors Ω est ouvert, ϕ est de classe C^r et, pour tout $(t_0;y_0)\in U$, l'appl.

$$Z : J(t_0;y_0)\ni t\longmapsto (D_x\phi)(t;t_0;y_0)\in\mathcal{L}_c(F)$$

est C^1, est sol. de l'éq. linéa. d'inconnue $M : J\to\mathcal{L}_c(F)$ donnée par

$$\forall t\in J,\quad M'(t) = (D_x f)(t;\phi(t;t_0;y_0))\circ M(t)$$

et vérifie $(D_x\phi)(t_0;t_0;y_0) = id_F$.

<u>Preuve</u> : Soit $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{R} \times F$
$$(s;x) \longmapsto (1 ; f(s;x)).$$

Comme f est C^r, $\tilde{f}$ l'est aussi. Pour $\varphi : J \to F$ (J intervalle)
on pose $\tilde{\varphi} : J \longrightarrow \mathbb{R} \times F$
$$s \longmapsto (s ; \varphi(s)).$$

On a : ($\tilde{\varphi}$ est C^p) $\Leftrightarrow$ (φ est C^p).

De plus, qd $\tilde{\varphi}$ ou φ est C^1, on a, pour $t \in I$,
$$\tilde{\varphi}'(t) = (1 ; \varphi'(t)) \text{ et } \tilde{f}(\tilde{\varphi}(t)) = (1 ; f(\tilde{\varphi}(t))) = (1 ; f(t ; \varphi(t))).$$

Donc φ est sol. de (E) ssi $\tilde{\varphi}$ est sol. de l'éq. ass. à $\tilde{f}$.
Par la prop. 5 appliquée à $\tilde{f}$, on obtient donc toutes les affirmations du Th. $\square$

<u>Th. (régu. du flot, version à paramètre).</u>

Soit $(F ; \|\cdot\|)$ un Banach et $(\Lambda ; \|\cdot\|_\Lambda)$ un e.v.n. (sur $\mathbb{K}$ tous les deux). Soit U un ouv. de $\mathbb{R} \times F \times \Lambda$ et $f : U \to F$ de classe C^r (pour un $r \in \mathbb{N}^*$) vérifiant les conditions du paragraphe 4.

L'appl. $\Phi : \{(t ; t_0 ; y_0 ; \lambda) \in \mathbb{R} \times U \times \Lambda ; t \in J_{(t_0 ; y_0 ; \lambda)}\} \to F$
$$(t ; t_0 ; y_0 ; \lambda) \longmapsto \varphi_{(t_0 ; y_0 ; \lambda)}(t)$$

est C^r. De plus, le résultat concernant $(D_x\Phi)$ du Th. préc. est valide pour tout $\lambda \in \Lambda$.