17

2 – Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires.

IR Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n. complet ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de F dans F. On munit cet espace de la norme : pour $U \in \mathcal{L}$,

$$\|U\|_0 \;:=\; \sup_{v\in F\setminus\{0\}} \frac{\|U(v)\|_F}{\|v\|_F} \,.$$

Théorème 1. *Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n. complet ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(\mathcal{L}; \|\cdot\|_0)$ l'espace des applications linéaires continues de F dans F. Soit $A : I \longrightarrow \mathcal{L}$ et $b : I \longrightarrow F$ des applications continues. Pour tout $v_0 \in F$ et tout $t_0 \in I$, il existe une unique solution $Z : I \longrightarrow F$ de l'équation différentielle linéaire (E), d'inconnue $y : J \longrightarrow F$, donnée par*

$$\forall t \in J\,, \quad y'(t) \;=\; A(t)\cdot y(t) \,+\, b(t)\,,$$

telle que $Z(t_0) = v_0$.

Démonstration : On construit Z comme limite d'une suite de fonctions appropriées que l'on construit par récurrence.
Soit $z_0 : I \longrightarrow F$ donnée par $z_0(t) = 0$ (par exemple). Pour $n \in \mathbb{N}$, en supposant $z_n : I \longrightarrow F$ construite et continue, on pose $z_{n+1} : I \longrightarrow F$ définie par

$$z_{n+1}(t) \;=\; v_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z_n(s) \,+\, b(s)\big)\, ds\,.$$

Comme z_n est continue, l'intégrande l'est aussi et z_{n+1} est aussi continue. Par récurrence, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est constituée de fonctions continues. Soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a < t_0 < b$. Comme A est continue, sa restriction à l'intervalle compact $[a;b]$ est bornée par un certain $M > 0$. Donc, pour tout $t \in [a;b]$, $\|A(t)\|_0 \le M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [a;b]$, on a, en utilisant le fait que chaque $A(s)$ est linéaire continue,

$$\begin{aligned}
\big\|z_{n+1}(t) \,-\, z_n(t)\big\|_F \;&=\; \Big\|\int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\big(z_n(s) \,-\, z_{n-1}(s)\big)\, ds\Big\|_F \\
&\le\; \Big|\int_{t_0}^{t} \big\|A(s)\cdot\big(z_n(s) \,-\, z_{n-1}(s)\big)\big\|_F\, ds\Big| \\
&\le\; \Big|\int_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big\|_0\cdot\big\|z_n(s) \,-\, z_{n-1}(s)\big\|_F\, ds\Big| \\
&\le\; M\cdot\Big|\int_{t_0}^{t} \big\|z_n(s) \,-\, z_{n-1}(s)\big\|_F\, ds\Big|\,. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Soit

$$M_1 \;=\; 1 \,+\, \sup_{s\in[a;b]} \big\|z_1(s) \,-\, z_0(s)\big\|_F \,>\, 0\,.$$

M_1 est fini puisque $z_1 - z_0$ est continue sur le compact $[a;b]$. On montre par récurrence, la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall t \in [a;b]\,, \quad \big\|z_{n+1}(t) \,-\, z_n(t)\big\|_F \;\le\; M_1\cdot M^n\cdot\frac{|t-t_0|^n}{n!}\,. \qquad (28)$$

Par définition de M_1, la propriété est vraie au rang $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n-1$, pour un $n > 0$. Par (27) et l'hypothèse de récurrence, on a, pour $t \in [a;b]$,

$$\left\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\right\|_F \leq M \cdot \left|\int_{t_0}^{t} M_1 \cdot M^{n-1} \cdot \frac{|s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, ds\right| = M_1 \cdot M^n \cdot \frac{|t-t_0|^n}{n!},$$

c'est-à-dire la propriété au rang n. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{t\in[a;b]} \left\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\right\|_F \leq M_1 \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}. \tag{29}$$

La série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_1 M^n (b-a)^n/(n!)$ est convergente (vers $M_1 e^{M(b-a)}$) donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z_{n+1} - z_n)$ converge normalement sur $[a;b]$. Comme chaque $z_{n+1} - z_n$ l'est, sa somme $z : [a;b] \longrightarrow F$ est continue. De plus, comme z_0 est nulle, on a, pour tout $N \geq 1$ et tout $t \in [a;b]$,

$$\begin{aligned}
\left\|z(t) - z_N(t)\right\|_F &= \left\|z(t) - \sum_{n=0}^{N-1}\big(z_{n+1}(t) - z_n(t)\big)\right\|_F \\
&= \left\|\sum_{n=N}^{\infty}\big(z_{n+1}(t) - z_n(t)\big)\right\|_F \leq \sum_{n=N}^{\infty}\left\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\right\|_F \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} \sup_{t\in[a;b]} \left\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\right\|_F.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{t\in[a;b]} \left\|z(t) - z_N(t)\right\|_F \leq \sum_{n=N}^{\infty} \sup_{t\in[a;b]} \left\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\right\|_F.$$

Comme le membre de droite est le reste d'une série convergente, il tend vers 0 quand $N \to \infty$. Donc la suite $(z_N)_{N\in N^*}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers z.
Pour $t \in [a;b]$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z_N(s) + b(s)\big)\, ds - \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z(s) + b(s)\big)\, ds\right\|_F \\
= &\left\|\int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\big(z_N(s) - z(s)\big)\, ds\right\|_F \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|A(s)\cdot\big(z_N(s) - z(s)\big)\right\|_F ds\right| \\
\leq &\left|\int_{t_0}^{t} \left\|A(s)\right\|_0 ds\right| \cdot \sup_{s\in[a;b]} \left\|z(s) - z_N(s)\right\|_F.
\end{aligned}$$

Le membre de droite est le produit d'un terme indépendant de N par une suite tendant vers 0 quand $N \to \infty$. Par le théorème des gendarmes, pour tout $t \in [a;b]$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z_N(s) + b(s)\big)\, ds = \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z(s) + b(s)\big)\, ds.$$

Pour $t \in [a;b]$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$z_{N+1}(t) \;=\; v_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z_N(s) \,+\, b(s)\big)\,ds$$

donc, par passage à la limite $N \to \infty$, on récupère, pour $t \in [a;b]$,

$$z(t) \;=\; v_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z(s) \,+\, b(s)\big)\,ds \tag{30}$$

Comme la fonction $[a;b] \ni s \mapsto A(s)\cdot z(s) + b(s)$ est continue, z est de classe C^1 sur $[a;b]$ et, pour $t \in [a;b]$,

$$z'(t) \;=\; A(t)\cdot z(t) \,+\, b(t) \tag{31}$$

De plus, par (30) pour $t = t_0$, $z(t_0) = v_0$.
Soit $(c;d) \in I^2$ tel que $c < t_0 < d$. Comme précédemment, on construit une solution $y : [c;d] \longrightarrow F$ telle que $y(t_0) = v_0$. Soit $K = [a;b] \cap [c;d]$ et $\delta : K \longrightarrow F$ donnée par $\delta(t) = y(t) - z(t)$. On a $t_0 \in K$ et $\delta(t_0) = 0$. Pour tout $t \in K$, $\delta'(t) = A(t)\cdot\delta(t)$. Soit $t_1 \in I$ avec $t_1 \geq t_0$. On pose

$$S \;=\; \sup_{t\in[t_0;t_1]} \|\delta(t)\|_F\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\forall t \in [t_0;t_1]\,,\quad \|\delta(t)\|_F \;\leq\; S\cdot\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,.$$

Par définition de S, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour $t \in [t_0;t_1]$,

$$\delta(t) \;=\; \delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\delta(s)\,ds \;=\; \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\delta(s)\,ds\,,$$

$$\|\delta(t)\|_F \;\leq\; \int_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big\|_0\cdot\|\delta(s)\|_F\,ds \;\leq\; M\cdot S\int_{t_0}^{t}\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,ds \;=\; S\cdot\frac{M^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \;\leq\; S \;=\; \sup_{t\in[t_0;t_1]} \|\delta(t)\|_F \;\leq\; S\cdot\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série convergente, il tend donc vers 0 quand $n \to \infty$. Par le théorème des gendarmes, $S = 0$ et δ est nulle sur $[t_0;t_1]$.
On montre de même que δ est nulle sur $[t_1;t_0]$ lorsque $t_1 \in K$ avec $t_1 \leq t_0$. Comme t_1 est arbitraire, δ est nulle sur I et y coïncide avec z sur K.
Pour tout $(a;b) \in I^2$ tel que $a < t_0 < b$, on note par $z_{[a;b]} : [a;b] \longrightarrow F$ la solution précédemment construite. L'application $Z : I \longrightarrow F$ définie par, pour $t \in I$, $Z(t) = z_{[a;b]}(t)$, pour un $(a;b) \in I^2$ tel que $a \leq t \leq b$, est bien définie et est solution de (E) sur I tout entier. $\square$

donc, par passage à la limite $N \to \infty$, on récupère, pour $t \in [a;b]$,

$$z(t) \;=\; v_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\cdot z(s) \,+\, b(s)\big)\,ds \tag{4}$$

Comme la fonction $[a;b] \ni s \mapsto A(s)\cdot z(s) + b(s)$ est continue, z est de classe C^1 sur $[a;b]$ et, pour $t \in [a;b]$,

$$z'(t) \;=\; A(t)\cdot z(t) + b(t) \tag{5}$$

~~Comme a et b sont arbitraires dans I~~, z est bien définie et C^1 sur $\cancel{I}$ $[a,b]$ et (5) est valable sur $\cancel{I}$ $[a,b]$. De plus, par (4) pour $t = t_0$, $z(t_0) = v_0$. On note z par $z_{a,b}$.

On suppose maintenant que y est une solution sur I de (E) vérifiant $y(t_0) = v_0$. Pour $\delta = y - z$, on a $\delta(t_0) = 0$ et, pour tout $t \in I$, $\delta'(t) = A(t)\cdot\delta(t)$. Soit $t_1 \in I$ avec $t_1 \geq t_0$. On pose

$$S \;=\; \sup_{t\in[t_0;t_1]} \|\delta(t)\|_F\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\forall t \in [t_0;t_1]\,,\quad \|\delta(t)\|_F \;\leq\; S\cdot\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,.$$

Par définition de S, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour $t \in [t_0;t_1]$,

$$\delta(t) \;=\; \delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\delta(s)\,ds \;=\; \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot\delta(s)\,ds\,,$$

$$\|\delta(t)\|_F \;\leq\; \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_0\cdot\|\delta(s)\|_F\,ds \;\leq\; M\cdot S\int_{t_0}^{t}\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,ds \;=\; S\cdot\frac{M^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \;\leq\; S \;=\; \sup_{t\in[t_0;t_1]} \|\delta(t)\|_F \;\leq\; S\cdot\frac{M^n(t-t_0)^n}{n!}\,.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série convergente, il tend donc vers 0 quand $n \to \infty$. Par le théorème des gendarmes, $S = 0$ et δ est nulle sur $[t_0;t_1]$.
On montre de même que δ est nulle sur $[t_1;t_0]$ lorsque $t_1 \in I$ avec $t_1 \leq t_0$. Comme t_1 est arbitraire, δ est nulle sur I et y coïncide avec z. $\square$

$Z : I \to F$, $x \mapsto z_{a,b}(x)$ où $a<b$ et $x \in [a;b]$ bien déf. et sol. de (E) sur I. Elle convient.

Corollaire 1 : Dans les cond. du th. 1, soit $t_0 \in I$. Soit S l'ensemble des sol. de l'éq. sur I.
L'appl. $\delta_{t_0} : S \to F$, $y \mapsto y(t_0)$ est bijective.

Dans le cas où b est la fonct. nulle, on note S par S_0 (ens. des sol. de l'éq. sans 2nd mb.) et

L'appl. δ_{t_0} est de plus linéaire.
Dans le cas général, $S = \{z + y_0,\ y_0 \in S_0\}$ où $z \in S$.

<u>Preuve</u> : D'après le Th. 1, $S \neq \emptyset$ donc δ_{t_0} est bien déf.
Soit $v_0 \in F$. Par le Th. 1, il existe une unique sol. z de l'éq. définie sur I qui prend la valeur v_0 en t_0. Donc z est l'unique sol. de l'éq.

$$\delta_{t_0}(y) = v_0.$$

δ_{t_0} est donc bij.
On supp. b nulle. S_0 est clairement un $\mathbb{K}$-ev, et δ_{t_0} est linéaire.
On retourne au cas géné, Si z_1 et z_2 sont sol. sur I alors $z_1 - z_2$ est sol. de l'éq. sans 2nd mb.
Donc il existe $y \in S_0$ t.q. $z_1 = z_2 + y$.
D'où $S \subset \{z + y_0 ; y_0 \in S_0\}$ pour un $z \in S$.
Réci, tout élé. de ↑ est sol. car

$$\forall t \in I,\quad \overset{\circ}{\overbrace{z + y_0}}(t) = \overset{\circ}{z}(t) + \overset{\circ}{y}_0(t) \overset{z \in S,\, y_0 \in S_0}{=} A(t)z(t) + b(t) + A(t)y_0(t)$$
$$= A(t)\,(z + y_0)(t) + b(t)$$

donc $z + y_0 \in S$. $\square$

<u>Rq.</u> : Pour trouver S, il suffit de déterminer S_0 et une sol. (particulière) de l'éq.