Quelques propriétés

+ rappels sur $\exp : \mathcal{L}(F) \to \mathcal{L}(F)$ (continuité, + propr. morphisme + $\exp(\mathcal{L}) \subset GL$).

* Cas où A est une fonct. constante égale à $A \in \mathcal{L}(F)$ (F est de dim. qcq. !!).

$$S_0 = \{ I \ni t \mapsto \exp(tA).Y_0 \,;\, Y_0 \in F \}.$$

Soit $Y_0 \in F$.
En utilisant la dérivabilité de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{L}_c(F)$ (cf. TD), on montre que $Y : I \ni t \mapsto \exp(tA).Y_0 \in F$ est C^1 et vérifie l'éq. sur I.

Soit $Z \in S_0$. Posons $Y : \begin{array}{l} I \longrightarrow F \\ t \longmapsto \exp(-tA).Z(t). \end{array}$

Y est C^1 et, pour $t \in I$,

$$Y'(t) = \exp(-tA)(-A).Z(t) + \exp(-tA)Z'(t)$$
$$= \exp(-tA)(Z'(t) - AZ(t))$$
$$= 0$$

car $Z \in S_0$. Donc Y est cte sur I et il existe $Y_0 \in F$ tq, pour tout $t \in I$, $Y(t) = Y_0$. D'où, pour $t \in I$, $Z(t) = \exp(+tA)Y_0$. $\square$

Rq. : Lorsque $AB - BA = 0$, on peut montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a aussi $S_0 = \{ I \ni t \mapsto \exp((t-t_0)A).Z_0 \,;\, Z_0 \in F \}$.
cf. $\exp((t-t_0)A) = \exp(tA)\exp(-t_0A)$ et $\exp(-t_0A)$ est bij. sur F.

* Si F est de dimension finie n et

A est diagonalisable alors

$S_0 = \text{vect}\{Y_1 ; \dots ; Y_n\}$

où $\quad Y_j : I \ni t \longmapsto \exp(t\lambda_j) . Y_j^0$

avec $(Y_1^0, \dots, Y_n^0)$ base de vect. propres de A associés resp. aux v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

<u>Preuve</u> : Par le cor. 1, on sait que S_0 est un esp. vect. de dim. n.

Pour tout j et $t \in I$,

$$\exp(tA) . Y_j^0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\right) . Y_j^0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n . Y_j^0$$

(car l'appl. $\begin{array}{l} \mathcal{L}(F) \longrightarrow F \\ A \longmapsto A . Y_j^0 \end{array}$ est linéaire cont.)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\lambda_j^n Y_j^0}_{\text{par récu. sur } n.}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_j^n}{n!}\right) Y_j^0 = \exp(t\lambda_j) Y_j^0$$

Donc $I \ni t \mapsto \exp(t\lambda_j) Y_j^0$ est une sol.

Supposons qu'on ait $\sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j = 0$

avec $\mu_j \in \mathbb{K}$.

Pour tout $t \in I$,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \exp(tA) Y_j^0 = \exp(tA)\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j^0\right)$$

Comme $\exp(tA)$ est bij., $\sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j^0 = 0$

Comme $(Y_1^0, \dots, Y_n^0)$ est une base,

$\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$.

Donc $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre. □

* voir les TD pour d'autres exemples de calcul de $\exp(tA)$.

* Cas où F est de dimension 1.

On sait calculer S_0 dans le cas général où A est cst. ! → Rq. sur $y' = a(t)y$ uti. le log.

* Méthode de "variation des ctes" :

On suppose que F est de dim. finie n et qu'on a une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de S_0. On peut déterminer une

Une sol. de Z de l'éq. (E) sur I de la manière suivante (en refaisant la preuve de la prop. suiv.)

<u>Proposition</u> : Dans le cas précédent, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \to \mathbb{K}$ C^1 t.q. $Z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i$ soit solution sur I de l'éq. <u>totale</u>.

<u>Rq</u> : Toute sol. de l'éq. totale peut donc s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) Y_i(t)$ pour des fct. μ_i appropriées.

<u>Preuve</u> : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Il existe des fonct. $b_1, \dots, b_n : I \to \mathbb{K}$

t.q. $\forall t \in I$, $b(t) = \sum b_i(t) f_i$.

Comme b est conti., les b_i le sont aussi.

Pour $t \in I$, soit

$$W(t) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} Y_1(t) & \dots & Y_n(t) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{matrix} \end{array}$$

Comme $\delta_t : S_0 \to F$ est bij.,

$(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de F

donc $W(t)$ est inversible, ceci pour tout $t \in I$.

Pour $t \in I$,
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \left(W(t)^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Les u_i sont conti., et on a

$\forall t \in I$, $b(t) = \sum_i u_i(t) Y_i(t)$.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \to \mathbb{K}$ des fonct. C^1.

$Z = \sum \lambda_i Y_i$ est sol. de l'éq. totale.

$\iff \forall t \in I, \quad Z'(t) = A(t)Z(t) + b(t)$

$\iff \forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \cancel{Y_i'(t)} = \cancel{A(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) Y_i(t)} + b(t)$

$\iff \forall t \in I, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) Y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) Y_i(t) \,. \quad (*)$

Comme les u_i sont conti., on choisit, pour chaque i, une primitive λ_i de u_i. La prop. $(*)$ est alors vraie donc la fonct. Z corresp. est sol de l'éq. totale. $\square$

Dans la pratique, on reprend essentiellement la preuve précédente.

$*$ Principe de superposition. On se place dans le cas général ($\dim F$ qcq, A seulement conti).

On supp. que $b = b_1 + b_2$ où b_i sont conti. sur I.

Si Z_1 est une sol. de $Y' = A.Y + b_1$

et Z_2 ———— $Y' = A.Y + b_2$

alors $Z_1 + Z_2$ ———— $Y' = A.Y + b$.

En effet, pour $t \in I$,

$(Z_1 + Z_2)'(t) = Z_1'(t) + Z_2'(t) = A(t)Z_1(t) + b_1(t) + A(t)Z_2(t) + b_2(t)$
$= A(t)(Z_1(t) + Z_2(t)) + b(t)$.

3 - Th. de Cauchy-Lipschitz, cas général.

Th. du point fixe ds un Banach E : Si $E \to E$ contract. $\exists !$ pt fixe

Soit $(F, \|.\|)$ un esp. vect. normé <u>complet</u>.

<u>Déf.</u> : * Soit V un ouv. de F, $g : V \to F$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
On dit que g est k-lipschitzienne si

$$\forall (x;y) \in V^2, \ \|g(x) - g(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

On dit que g est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tq. g est k-lipschitz.

* Soit V un ouv. de F, I un int. de $\mathbb{R}$, $f : I \times V \to F$ et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k-lipschitzienne / la 2è var. si

$$\forall (x;y) \in V^2, \forall t \in I, \ \|f(t;x) - f(t;y)\| \leq k \|x - y\|.$$

On dit que f est lipschit/2è var s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tq f est k-lipsch/2è var.

* Soit U un ouv. de $\mathbb{R} \times F$, $f : U \to F$
On dit que f est localement lipsch/2è var si, pour tout $(t_0; x_0) \in U$, il existe un int. ouv. I_0 tq. $t_0 \in I_0$ et un vois. V_0 de x_0 et $k \geq 0$ tq.

$\forall (x;y) \in V_0, \forall t \in I_0, \|f(t;x) - f(t;y)\| \leq k\|x-y\|.$

Attention : k peut dépendre de (I_0, V_0) mais pas de x, ni de y, ni de t.

Notations : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n. Pour $x_0 \in E$ et $r \geq 0$, on pose $B(x_0; r] := \{x \in E ; \|x - x_0\| \leq r\}$ et $B(x_0; r[:= \{x \in E ; \|x - x_0\| < r\}$.

Rq. : * Si $g : V \to F$ est lipsch., elle est (uniformément) conti. Si g est loca. lipsch., elle est conti.

* Si $f : \underset{\text{ouv. de } \mathbb{R}\times F}{U} \to F$ est C^1 et $\dim F < \infty$ alors f est loca. lipsch./2è var.

En effet : Soit $(t_0 ; x_0) \in U$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tq. $]t_0 - 2\varepsilon_0 ; t_0 + 2\varepsilon_0[\times B(x_0 ; 2\delta_0[\subset U$.

Soit $k = \sup_{(t;x) \in [t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0] \times B(x_0 ; \delta_0]} \|D_x f(t;x)\|_0 \geq 0$.

k est fini car $[t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0] \times B(x_0 ; \delta_0]$ est un fermé borné de $\mathbb{R} \times F$ donc un compact (car $\dim \mathbb{R} \times F < \infty$).

Pour $t \in]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[$, $(x;y) \in B(x_0 ; \delta_0[^2$, on a par l'inég. des $\nearrow$ finis,

$$\|f(t;x) - f(t;y)\| \leq \|x-y\| \sup_{(t;x) \in]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[\times B(x_0 ; \delta_0[} \|D_x f(t;x)\| \leq k\|x-y\|.$$