donc f est loca. lipsch./2è var ; Si f est C^1 et $D_2 f$ loca. bornée, f est loca. lipsch/2è var : → cf TD

✓ * Attention : f conti. sur U (des 2 var.)

$\not\Rightarrow$ f loca. lipschitz/2è var.

sauf si f ne dépend pas de t !

* Soit $f : I \times V \to F$
$(t ; x) \mapsto r(t) g(x)$

où $r : I \to \mathbb{K}$ est bornée et $g : V \to F$ loca. lipschitz.

Alors f est loca. lipsch./2è var.

À vérifier en exercice.

Th. (C.L., version 1). :

Soit $(F, \|.\|)$ un Banach. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times F$ et $f : U \to F$ une appl. conti. et loca. lipsch./2è var !

1). Pour tout $(t_0 ; x_0) \in U$, il existe un int. ouvert J contenant t_0 et une sol. $\alpha : J \to F$ de l'éq. d'inconnue $y : I \to F$ donnée par

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = f(t ; y(t)) \qquad (E)$$

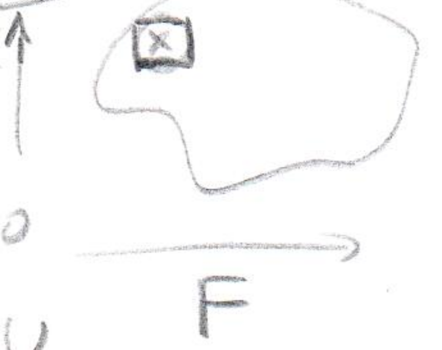
telle que $\alpha(t_0) = x_0$.

2) Pour $(t_0; x_0) \in U$, soit J et J' deux int. ouverts contenant t_0 et $\alpha : J \to F$, $\beta : J' \to F$ deux sol. de l'éq. diff. (E) telles que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$.

Alors $\alpha = \beta$ sur $J \cap J'$.

$\boxed{\alpha : I \to F \text{ sol de l'éq. avec } \alpha(t_0) = x_0 \ (0) \iff \alpha : I \to F \text{ continue : } \forall t \in I,\ \alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s; \alpha(s))\,ds.}$

Preuve : Soit $(t_0; x_0) \in U$.



1. Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $k \geq 0$ t.q. $\underbrace{]t_0 - 2\varepsilon_0 ; t_0 + 2\varepsilon_0[}_{I_0} \times \underbrace{B(x_0; 2\delta_0[}_{V_0} \subset U$

et t.q.

$\forall t \in I_0, \forall (x; x') \in V_0^2,\ \| f(t; x) - f(t; x') \| \leq k \| x - x' \|$,

$\forall t \in I_0\ \forall x \in V_0,\ \| f(t; x) - f(t_0; x_0) \| < 1$.

Soit $I_1 :=]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[$. Soit $\mathcal{F} = C^0(\bar{I}_1 ; F)$.

Comme $\bar{I}_1$ est compact, on peut munir $\mathcal{F}$ de la norme

$\forall g \in \mathcal{F},\ \| g \|_\infty := \sup_{t \in \bar{I}_1} \| g(t) \|$) cf. TD

et vérifier que $\mathcal{F}$ est complet (car F l'est !).

Soit $\mathcal{E} = \{ \alpha \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \alpha(\bar{I}_1) \subset B(x_0; \delta_0] \text{ et } \alpha(t_0) = x_0 \}$. $\neq \emptyset$

On diminue ε_0 pour que $2\varepsilon_0(1 + \| f(t_0; x_0) \|) < \delta_0$ et $2k\varepsilon_0 < 1$

On vérifie que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\hat{F}$.

Soit S :
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ g & \longmapsto & Sg : \begin{array}{rcl} \bar{I}_1 & \longrightarrow & F \\ t & \mapsto & x_0 + \int_{t_0}^t f(s; g(s))\,ds. \end{array} \end{array}$$

S est bien déf. Soit $\alpha \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} \|S\alpha(t) - x_0\| &= \left\|\int_{t_0}^t f(s, \alpha(s))\,ds\right\| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^t \|f(s; \alpha(s))\|\,ds\right| \\ &\leq |t - t_0| \underbrace{\sup_{t \in \bar{I}_1} \|f(t; \alpha(t))\|}_{\leq 1 + \|f(t_0; x_0)\|} \\ &< \delta_0. \end{aligned}$$

De plus, $S\alpha(t_0) = x_0$. Donc $S\alpha \in \mathcal{E}$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ et $t \in \bar{I}_1$,

$$\begin{aligned} \|S\alpha(t) - S\beta(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^t \left(f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))\right)ds\right\| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^t \|f(s; \alpha(s)) - f(s; \beta(s))\|\,ds\right| \\ &\leq k \left|\int_{t_0}^t \|\alpha(s) - \beta(s)\|\,ds\right| \end{aligned}$$

$\| S\alpha(t) - S\beta(t) \| \leq k |t - t_0| \, \| \alpha - \beta \|_\infty \leq 2k\varepsilon_0 \| \alpha - \beta \|_\infty$

avec $2k\varepsilon_0 < 1$.

Donc $S : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est contractante.

Comme $\mathcal{E}$ est fermé ds le complet $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ est complet. Par le Th. du pt. fixe il existe un unique $\alpha \in \mathcal{E}$ tq. $S\alpha = \alpha$.

Or a donc, pour $t \in]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[= I_1$,

$$\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s ; \alpha(s)) ds. \quad (**)$$

Donc α est C^1 sur I_1, $\alpha(t_0) = x_0$ et $\forall t \in I_1$, $\alpha'(t) = f(t ; \alpha(t))$.

Pour $(t_0 ; x_0)$, $\alpha_{|I_1}$ est une fonct. α remplissant les cond. du 1) du Th.

2). Soit $J'' = \{ t \in J \cap J' ; \alpha(t) = \beta(t) \}$.

On montre que $J'' = J \cap J'$. Par déf. de J'', $J'' \subset J \cap J'$.

Comme $J'' = \Big(\underbrace{(\alpha - \beta)_{|J \cap J'}}_{\text{conti.}} \Big)^{-1} \Big(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}} \Big)$

J'' est fermé.

Soit $t_1 \in J''$. D'après l'équiv. (o) et le 1), il existe $\varepsilon_1 > 0$

assez petit tq. l'éq. admet une unique sol. γ sur $]t_1-\varepsilon_1 ; t_1+\varepsilon_1[$ vérifiant

$\gamma(t_1) = \alpha(t_1) = \beta(t_1)$.

Donc, par unicité, $\alpha = \beta$ sur $]t_1-\varepsilon_1 ; t_1+\varepsilon_1[$.

Donc J'' est ouvert.

$J'' \neq \emptyset$ car $t_0 \in J''$.

Par connexité de $J \cap J'$, $J'' = J \cap J'$

Soit $K^+ = \{ t \in J \cap J' \cap [t_0 ; +\infty[\; ; \; [t_0 ; t] \subset J'' \}$.

On a $\sup K^+ \leq \sup J \cap J'$.

On montre l'égalité : $\sup K^+ = \sup J \cap J'$.

Ensuite, de m., on montre que

$\inf \{ t \in J \cap J' \cap]-\infty ; t_0] ; [t ; t_0] \subset J'' \}$

$= \inf J \cap J'$.

Cela démontre que $J'' = J \cap J'$.

Supposons $c := \sup K^+ < \sup J \cap J'$.

c est limite d'une suite d'élé. de J'' qui est fermé donc $c \in J''$. Comme J'' est ouvert, il existe $\delta > 0$ tq. $]c-\delta ; c+\delta[\subset J''$.

Donc $[t_0 ; c+\frac{\delta}{2}] = [t_0 ; c-\frac{\delta}{2}] \cup [c-\frac{\delta}{2} ; c+\frac{\delta}{2}] \subset J''$.

D'où $c + \frac{\delta}{2} \in K^+$. Contr. avec la déf de c. D'où $\sup K^+ = \sup J \cap J'$. $\square$

Rq. : * Soit $f : U \to F$ est C^1

Les hyp. de C.L. sont vérifiées si la différentielle partielle par rapport à la 2è var. est localement bornée. C'est automatique si $\dim F < \infty$.

* Le résultat du th. est faux en général si l'éq. n'est pas sous forme normale (cf. TD)

* Si f n'est pas loca. lipsch/2è var (mais conti. seulement) (cf TD).

* Le point 2) est une sorte d'unicité locale des sol. On va préciser ce point.

Déf. : On considère l'éq. (E) précédente et J un int. infini de $\mathbb{R}$.

* On dit que α est une J-sol. de (E) si $\alpha : J \to F$ et α vérifie l'éq. (E).

* On dit qu'une J-sol. α de (E) est maximale s'il n'existe pas de J_1-sol. β de (E) tq. $J \subset J_1$, $J \neq J_1$ et $\beta_{|J} = \alpha$.

Th. (C.L., version 2).

Soit $(F, \|.\|)$ un esp. de Banach. Soit U un ouvr. de $\mathbb{R} \times F$ et $f : U \to F$ continue et loca. lipsch./2è var.

Soit (E) l'éq. d'inconnue $y : J \to F$ formée par

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = f(t; y(t)).$$

Pour tout $(t_0; x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale $\alpha : J \to F$ de (E) tq. $\alpha(t_0) = x_0$.

De plus J est un int. ouvert.

Preuve : Soit $(t_0; x_0) \in U$. Soit

$$\mathcal{G} = \{ \beta : J_\beta \to F ; \ \beta \text{ est sol. de (E)}, t_0 \in J_\beta \text{ et } \beta(t_0) = x_0 \}.$$
J_β int. ouvert.

$\mathcal{G}$ est non vide par le 1) du th précédent.

$J \to$ ouv. $\to$ c'est aussi un int. car chaque J_β est un int. ouv. et il contient t_0.

Soit $\alpha : \overbrace{\bigcup_{\beta \in \mathcal{G}} J_\beta}^{J} \to F$

$t \mapsto \tilde{\beta}(t)$ si $t \in J_{\tilde{\beta}}$.

α est bien déf. : si $t \in J_{\tilde{\beta}}$ et $t \in J_{\hat{\beta}}$ alors par le 2) du th. préc. $\tilde{\beta}$ et $\hat{\beta}$ coïncident sur $J_{\tilde{\beta}} \cap J_{\hat{\beta}}$

d'où $\tilde{\beta}(t) = \hat{\beta}(t)$.

~~De plus J_α est un int. ouvert.~~

α vérifie l'éq. (E) sur J :

Soit $t \in J$. Il existe $\beta \in \mathcal{G}$ tq. $t \in J_\beta$.
Sur J_β, α coïncide avec β, qui est dérivable et solution de E sur J_β. Donc α est dérivable en t et vérifie (E) en t. □

Rq : <u>Reparamétrisation de solution.</u>

Soit $f : \underset{\text{int. de } \mathbb{R} \text{ de longu.}>0}{I} \times \underset{\text{ouv. de } E}{V} \longrightarrow E$ (Banach) continue et loca. lipschitz. /2è var.

Soit $\theta : \underset{\text{int. de } \mathbb{R}}{I'} \longrightarrow I$ un C^1-difféo.
en partic. θ' est de signe strict cst.

Si $\alpha : J \longrightarrow E$ est une sol. (max.) de l'éq. définie par f alors $\alpha \circ \theta$ est bien définie et C^1 et, pour $s \in \theta^{-1}(J)$,

$$\widehat{\alpha \circ \theta}'(s) = \alpha'(\theta(s))\,\theta'(s) = \theta'(s)\, f(\theta(s); \alpha(\theta(s)))$$

donc $\alpha \circ \theta$ est sol. sur $\theta^{-1}(J)$ de l'éq.

$$Z'(s) = g(s; Z(s))$$

où $g : I' \times V \longrightarrow E$
$(s; x) \longmapsto \theta'(s) f(\theta(s); x)$.

La reparamétrisation $\alpha \circ \theta$ de $\operatorname{Im} \alpha$ est donc sol. d'une autre éq. diff. qui vérifie les hyp. de C.L. (à vérifier).

Cas intéressant : on supp. que
$\forall (s;x) \in I' \times V \quad f(\theta(s); x) = f(s; x)$.