Dans ce cas, $g(s;x) = \underset{\substack{(\text{tjs} > 0 \\ \text{ou} \\ \text{tjs} < 0)}}{\theta'(s)} \times f(s;x)$.

On peut montrer que $\alpha \circ \theta$ est une sol. max. de l'éq. pour g ! De plus, si β est une sol. max. de l'éq. pour g, $\beta \circ \theta^{(-1)}$ est une sol. max. de l'éq. pour f. admis

Applications : * on suppose que f est paire en t ; Soit I un vois. de 0, sym. $/0$ et f comme avant telle

$\forall (t;x) \in I \times V, \quad f(-t;x) = f(t;x)$.

Soit $\theta : \begin{array}{l} I \longrightarrow I \\ t \longmapsto -t \end{array}$. C'est un C^1-difféo.

D'après ce qui précède, si α est une sol. max. de l'éq. associée à f, $\alpha \circ \theta$ est une sol. max. de l'éq. associée à $-f$.

Autre cas intéressant : I sym. $/0$ et

$\forall (t;x) \in I \times V, \quad f(-t;x) = -f(t;x)$.

D'après ce qui précède, si α est une sol. max. de l'éq. associée à f, $\hat{\alpha} : t \mapsto \alpha(-t)$ en est une aussi !

Comme $\alpha(0) = \hat{\alpha}(0)$, on a par unicité de C.L. $\alpha = \hat{\alpha}$. Donc J est sym. $/0$ et α est paire.

Cas très intéressant : On suppose que :

$\forall (t;x) \in I \times V, \quad f(t;x) = r(t)\, g(x)$

avec g loca. lipschitz. et r continue et sans annulation.

On vérifie que f est conti. et loca. lipschitz. / 2è var. De plus, on peut relier les sol. max. de l'éq. définie par f à celle de

$$x' = g(x) \qquad (\text{éq. sur } \mathbb{R}\times V).$$

Voir un exercice des <u>TD</u>.

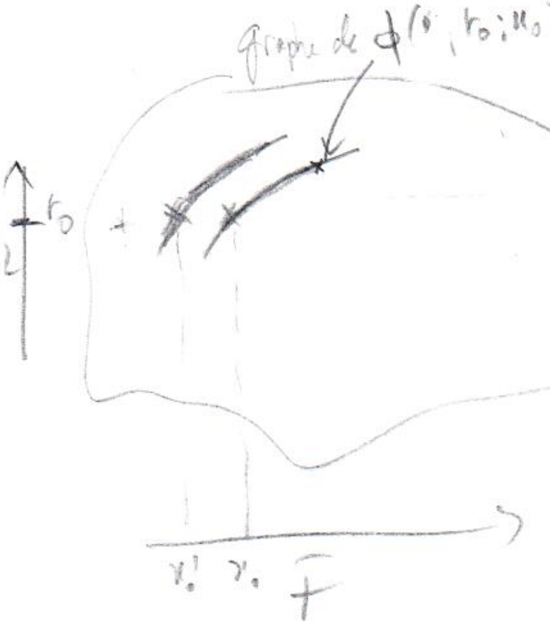
4- <u>Flot.</u> Continuité du flot.

Sous les cond. du Th. de C.L, soit $(t_0;x_0)\in U$.

Il existe $J_{(t_0;x_0)}$ int. de $\mathbb{R}$ et $\phi(\cdot;t_0;x_0): J_{(t_0;x_0)}\to F$ sol. max. de (E) tq. $\phi(t_0;t_0;x_0)=x_0$.

Soit
$$\phi : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & F \\ (t;t_0;x_0) & \longmapsto & \phi(t;t_0;x_0) \end{array}$$
"flot de f". "flot de l'éq. déf. par f".

où $W=\{(t;t_0;x_0)\in \mathbb{R}\times U;\ t\in J_{(t_0;x_0)}\}$.



* <u>Cas linéa.</u> : C.L s'applique mais avec un résultat moins fort

$\phi: I^2\times V \to F$ bien déf.

On s'intéresse à la régularité de ϕ. Est-elle conti. de toutes les vars. ?

On va traiter cette question dans un cadre plus général.

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un esp. de Banach. ← (dim. qcq !)

Soit $(\Lambda, \|\cdot\|_\Lambda)$ un e.v.n. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times F \times \Lambda$ et $f : \Omega \to F$ une appl. conti. et loca. lipsch. / 2ème var :

Pour tout $(t_0; x_0; \lambda_0) \in \Omega$, il existe $\varepsilon_0, r_0, \rho_0 > 0$ et $k \geq 0$ tq

$\forall t \in]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[, \forall \lambda \in B(\lambda_0 ; \rho_0[, \forall (x ; x') \in B(x_0 ; r_0[^2,$

$$\| f(t; x; \lambda) - f(t; x'; \lambda) \| \leq k \|x - x'\|.$$

Pour $\lambda \in \Lambda$ soit $\Omega_\lambda = \{(t; x) \in \mathbb{R} \times F ; (t; x; \lambda) \in \Omega\}$.
c'est un ouv. de $\mathbb{R} \times F$

Soit $S = \{\lambda \in \Lambda ; \Omega_\lambda \neq \emptyset\}$.

Pour $\lambda \in S$, on a donc une éq. diff. (E_λ) sur Ω_λ d'inconnue $Y : J \to F$ donnée par

$$\forall t \in J, \quad Y'(t) = f(t; Y(t); \lambda).$$

On va établir un raffinement du Th. de C.L :

→ élargissement à la dépendance en λ ;

→ améliorations dans le cas sans paramètre.
(Le cas où $\Lambda = \{\lambda_0\}$ et $\mathcal{I}_{\lambda_0} \neq \emptyset$).

Déf. : Soit $(t_0; Y_0; \lambda_0) \in \Omega$ t.q. $\mathcal{I}_{\lambda_0} \neq \emptyset$.
On appelle tonneau de confinement (des éq. $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$)
au point $(t_0; Y_0; \lambda_0)$ un ens.

$$T = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \times B(x_0; \beta] \times B(\lambda_0; \gamma]$$

avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$ t.q. $T \subset \Omega$, il existe $L \in \mathbb{R}^+$
t.q. f soit L-lipsch./$2^{\text{è}}$ var sur T :

$\forall t \in [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha], \forall \lambda \in B(\lambda_0; \gamma], \forall (X, Y) \in B(x_0; \beta]^2,$

$$\| f(t; X; \lambda) - f(t; Y; \lambda) \| \leq L \| X - Y \|,$$

t.q.

$$M := \sup_{(t; X; \lambda) \in T} \| f(t; X; \lambda) \| < \infty$$

et $M\alpha \leq \beta/3$.

$(\alpha; \beta; \gamma; L; M)$ sont les caractéristiques de T.

Prop. 1 Pour $(t_0; Y_0; \lambda_0) \in \Omega$ avec $\mathcal{I}_{\lambda_0} \neq \emptyset$,
il existe un tonneau de confinement (des éq. (E_λ))
au point $(t_0; Y_0; \lambda_0)$,

Rq. : ce résultat est immédiat lorsque F est de dim. finie car dans ce cas T est compact.

Preuve : Comme f est loca. lipsch./2èvar., il existe $L \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tq.

f soit L-lipsch./2èvar sur

$$\Omega_0 =]t_0 - \varepsilon_0 ; t_0 + \varepsilon_0[\times B(Y_0 ; \beta_0[\times B(\lambda_0 ; \gamma_0[.$$

Comme f est conti., il existe $\varepsilon_1 \in]0 ; \varepsilon_1]$, $\beta_1 \in]0 ; \beta_1]$ et $\gamma_1 \in]0 ; \gamma_1]$ tq.

voir figure 1

$$(t ; x ; \lambda) \in \overbrace{]t_0 - \varepsilon_1 ; t_0 + \varepsilon_1[\times B(Y_0 ; \beta_1[\times B(\lambda_0 ; \gamma_1[}^{=: \Omega_1}$$

$$\Rightarrow \| f(t ; x ; \lambda) - f(t_0 ; Y_0 ; \lambda_0) \| < 1 .$$

Donc $M_1 := \sup_{(t ; x ; \lambda) \in \Omega_1} \| f(t ; x ; \lambda) \| \leq 1 + \| f(t_0 ; Y_0 ; \lambda_0) \|$.

Soit $\beta \in]0 ; \beta_1[$ et $\gamma \in]0 ; \gamma_1[$.

Soit $\alpha > 0$ tq. $\alpha < \varepsilon_1$ et $M_1 \alpha \leq \beta / 3$.

Soit $T = [t_0 - \alpha ; t_0 + \alpha] \times B(Y_0 ; \beta] \times B(\lambda_0 ; \gamma] \subset \Omega_1 \subset \Omega_0$.

C'est un tonneau de confinement (des (E_λ)) en $(t_0 ; Y_0 ; \lambda_0)$. □

<u>Prop. 2</u> : Dans le cadre précédent, soit T un tonneau de confinement des (E_λ) au point $(t_0; Y_0; \lambda_0)$ de caract. $(\alpha; \beta; \gamma; L; M)$.

Soit $J := [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$. Alors :

a). Pour chaque $(\tau; \Gamma; \lambda) \in T$ avec $|\tau - t_0| \leq \frac{\alpha}{2}$ et $\|\Gamma - Y_0\| \leq \frac{\beta}{2}$, l'éq. (E_λ) possède une unique J-sol. $\varphi : J \to F$ t.q. $\varphi(\tau) = \Gamma$.

On la note $\varphi_{(\tau; \Gamma; \lambda)}$

De plus $\underbrace{(\text{graphe } \varphi_{(\tau; \Gamma; \lambda)})}_{\subset \mathbb{R} \times F} \times \{\lambda\} \subset T$. voir figures 2 et 3

b). "Les fonctions $\varphi_{(\tau; \Gamma; \lambda)}$ convergent unif. sur J vers $\varphi_{(t_0; Y_0; \lambda_0)}$ quand

$\|\Gamma - \varphi_{(t_0; Y_0; \lambda_0)}(\tau)\| + \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda$ tend vers 0

en restant dans $[t_0 - \frac{\alpha}{2}; t_0 + \frac{\alpha}{2}] \times B(Y_0; \frac{\beta}{2}] \times B(\lambda_0; \gamma]$."

<u>Précisément</u> : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

pour tout $(\tau;\Gamma;\lambda)\in\left[t_0-\frac{\alpha}{2};t_0+\frac{\alpha}{2}\right]\times B(Y_0;\frac{\beta}{2}]\times B(\lambda_0;\gamma]$ (CT)
vérifiant $\|\Gamma-\varphi_{(t_0;Y_0;\lambda_0)}(\tau)\|+\|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\delta$,
on ait
$$\sup_{t\in J}\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(t)-\varphi_{(t_0;Y_0;\lambda_0)}(t)\|\leq\varepsilon.$$

Rq. : * Le point a) du Th. est nouveau car rien jusqu'à présent ne nous dit que les sol. considérées sont dif. sur J au moins.

* Interprétation graphique dans le cas sans paramètre ($\Lambda=\{\lambda_0\}$).