

Preuve de la prop. 2

(exposer la preuve sans paramètre)

34

a). Soit $(z; \Gamma; \lambda) \in T$ avec $|z - z_0| \leq \frac{\alpha}{2}$ et $\|\Gamma - \gamma_0\| \leq \frac{\beta}{2}$.

Soit $\varphi_0: J \rightarrow F$
 $t \mapsto \Gamma$.

Supp. construit $\varphi_n: J \rightarrow F$ c.n.h. fig.

Par $t \in J$, $(t; \varphi_n(t); \lambda) \in T$.

Comme $T \subset \Omega$ et $J \ni t \mapsto f(t; \varphi_n(t); \lambda)$ est c.n.h., on peut définir $\varphi_{n+1}: J \rightarrow F$ par

$$\varphi_{n+1}(t) := \Gamma + \int_z^t f(s; \varphi_n(s); \lambda) ds. \quad (*)$$

Par $t \in J$, on a

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \Gamma\| \leq \left| \int_z^t \|f(s; \varphi_n(s); \lambda)\| ds \right| \leq M |t - z| \leq \frac{M 3\alpha}{2} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Donc $\|\varphi_{n+1}(t) - \gamma_0\| \leq \beta$ et $(t; \varphi_{n+1}(t); \lambda) \in T$.

Par réc., on a construit une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de jct. c.n.h. de J à F fig.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\text{graphe } \varphi_n) \times \{\lambda\} \subset T.$$

Comme $\varphi_1 - \varphi_0$ est c.n.h. sur le compact J ,

$$H := \sup_{t \in J} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < \infty.$$

Par $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la prop.

$$\forall t \in J, \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq H \frac{|t - z|^n}{n!}.$$

$\mathcal{P}(s)$ est vraie par déf. de H .

3.5

Supp. $\mathcal{P}(s)$ vraie. Par $t \in J$

$$\|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| = \left\| \int_z^t (f(s; \varphi_{n+1}(s), \lambda) - f(s; \varphi_n(s), \lambda)) ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_z^t \|f(s; \varphi_{n+1}(s), \lambda) - f(s; \varphi_n(s), \lambda)\| ds \right|$$

Loca. Lipsch.

$$\leq \left| \int_z^t L \|\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)\| ds \right|$$

$$\stackrel{H.R.}{\leq} L \left| \int_z^t H L^n \frac{(s-z)^n}{n!} ds \right| = H L^{n+1} \frac{|t-z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par réc. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n .

Donc, comme $J = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq H \frac{(2L\alpha)^n}{n!} =: \rho_n$$

$\sum \rho_n$ cv. donc $\sum (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ cv normalement
donc unif. sur J . On note par $\hat{\varphi}: J \rightarrow F$
la limite. Comme, par tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \varphi_N - \varphi_0$$

$(\varphi_N)_N$ cv. unif. sur J vers $\varphi := \hat{\varphi} + \varphi_0$.

pour tout n , $\varphi_n(z) = \Gamma$ et $(\text{graph}(\varphi_n)) \times \{\lambda\} \subset T$

donc $\varphi(z) = \Gamma$ et $(\text{graph}(\varphi)) \times \{\lambda\} \subset T$.

Par tout n et $t \in J$

(36)

$$\| f(t; \varphi(t); \lambda) - f(t; \varphi_n(t); \lambda) \|$$

$$\leq L \| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|$$

dne $(f(\cdot; \varphi_n(\cdot); \lambda))_n$ cr. unif. sur J
vers $f(\cdot; \varphi(\cdot); \lambda)$. En part., par
 $t \in J$,

$$\int_c^t f(s; \varphi_n(s); \lambda) ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{dF} \int_c^t f(s; \varphi(s); \lambda) ds.$$

D'ne, par $t \in J$, en passant à la limite
 $n \rightarrow \infty$ de (*), on obtient

$$\varphi(t) = \Gamma + \int_c^t f(s; \varphi(s); \lambda) ds.$$

Dne φ est sol. de $(E\lambda)$ sur J . Comme $\varphi(c) = \Gamma$,

On a l'unicité par le th de Co.L. (VL)

b). Soit $\varphi_0^\lambda := \varphi(t_0; \varphi_0; \lambda)$

La fct $J \times B(\lambda_0; \delta) \ni (s, \lambda) \mapsto f(s; \varphi_0^\lambda(s); \lambda)$
 $\in F$

étant conti. et J comp.,

Cette fonction est conti. en λ unif. par
l'appor à Δ_0

$\forall \lambda_1 \in B(\lambda_0; \delta], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0; \forall \lambda \in B(\lambda_0; \delta] \text{ : } (37)$

$$(*) \quad \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \delta' \Rightarrow \sup_{\Delta \in J} \|f(s; \psi_0^\lambda(s); \lambda) - f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda_0)\|_K < \varepsilon$$

(voir TD).

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} e^{-2\alpha L} > 0$.

Soit $\delta \in]0, \varepsilon']$ t.q. $(*)$ est valable pour ε' , $\delta' = \delta$ et $\lambda_1 = \lambda_0$.

Soit $(z; \Gamma, \lambda) \in T$ avec

$$\|\Gamma - \psi_0^\lambda(z)\| + \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \delta,$$

$$|z - z_0| \leq \frac{\alpha}{2} \text{ et } \|\Gamma - \gamma_0\| \leq \beta/2.$$

$$(\text{on } \psi^\lambda = \psi(z; \Gamma, \lambda))$$

Pour $t \in J$, on a

$$\psi^\lambda(t) = \Gamma + \int_z^t f(s; \psi^\lambda(s); \lambda) ds$$

$$\text{et } \psi_0^{\lambda_0}(t) = \psi_0(z) + \int_z^t f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda_0) ds.$$

Donc

$$\psi^\lambda(t) - \psi_0^{\lambda_0}(t) = \Gamma - \psi_0(z) + \int_z^t \left[f(s; \psi^\lambda(s); \lambda) - f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda) \right. \\ \left. + f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda) - f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda_0) \right] ds$$

et

$$\|\psi^\lambda(t) - \psi_0^{\lambda_0}(t)\| \leq \|\Gamma - \psi_0(z)\| + \left| \int_z^t \|f(s; \psi^\lambda(s); \lambda) - f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda)\| ds \right| + \left| \int_z^t \|f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda) - f(s; \psi_0^{\lambda_0}(s); \lambda_0)\| ds \right|$$

Soit, muni que f est loc. lipsch./2^{er} var,

(38)

$$\|\hat{\psi}(t) - \hat{\psi}_0(t)\| \leq \delta + L \left| \int_z^t \|\hat{\psi}(s) - \hat{\psi}_0(s)\| ds \right| + \varepsilon'$$

$$" \leq 2\varepsilon' + L \left| \int_z^t \|\hat{\psi}(s) - \hat{\psi}_0(s)\| ds \right|.$$

Par le lemme de Gronwall (Y.T.D.), on a

$$\forall t \in J, \quad \|\hat{\psi}(t) - \hat{\psi}_0(t)\| \leq 2\varepsilon' e^{L|t-z|} \leq 2\varepsilon' e^{2\alpha L} = \varepsilon. \quad \square$$

On procède maintenant à l'amélioration suivante de la prop. 2 :

Prop. 3 : On considère la famille $(E_x)_{x \in \Lambda}$ d'eq. diff. précédente. Soit $(t_0; \gamma_0; \lambda_0) \in \Omega$

tg. $\Omega_{\lambda_0} \neq \emptyset$. Soit $\varphi_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)} : J_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)} \rightarrow F$

la sol. max. de (E_{λ_0}) vérifiant

$$\varphi_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)}(t_0) = \gamma_0.$$

Soit $[a_0; b_0]$ (avec $a < b$) un sous-int. compact

de $J_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)}$. Alors :

1 - Il existe $\delta > 0, \gamma > 0$ tg. , pour

tout $(z, \Gamma; \lambda) \in \Omega$ vérifiant $z \in [a_0; b_0]$,

$$\| \Gamma - \varphi_{(h; \gamma_0; \lambda_0)}(z) \| < \delta \text{ et } \| \lambda - \lambda_0 \|_\Lambda < \gamma_0, \quad (*) \quad [5-]$$

l'unique sol max. $\varphi_{(z; \Gamma; \lambda)}$ de (E_λ) valant Γ à la date z et déf. sur un int. ouvert $J_{(z; \Gamma; \lambda)}$ qui contient $[a; b]$.

2- Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ t.q.

pour $(z; \Gamma, \lambda) \in \Omega$ vérifiant $z \in [a; b]$ et $(*)$ on ait

$$\| \Gamma - \varphi_{(h; \gamma_0; \lambda_0)}(z) \| + \| \lambda - \lambda_0 \|_\Lambda < \mu \Rightarrow \sup_{t \in [a; b]} \| \varphi_{(z; \Gamma, \lambda)}(t) - \varphi_{(h; \gamma_0; \lambda_0)}(t) \| < \varepsilon.$$

"Convergence unif. sur $[a; b]$ de $\varphi_{(z; \Gamma, \lambda)}$ vers $\varphi_{(h; \gamma_0; \lambda_0)}$

lorsque $\| \Gamma - \varphi_{(h; \gamma_0; \lambda_0)}(z) \| + \| \lambda - \lambda_0 \|_\Lambda \rightarrow 0$."

Voir figure 4.

Pour chaque $s \in [a; b]$, il existe un bonneau de confinement $T_s = [s - \alpha_s; s + \alpha_s] \times B(\varphi_0(s); \beta_s) \times B(\lambda_0; \gamma_s)$ du point $(s; \varphi_0(s); \lambda_0)$. Comme $[a; b]$ est compact or comme

$$[a; b] \subset \bigcup_{s \in [a; b]}]s - \frac{\alpha_s}{2}; s + \frac{\alpha_s}{2}[$$

il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de $[a; b]$ t.q.

Idee de la preuve :

(sans parametre)

Strategie : pour $[a; b] \subset I_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)}$

recouvrir le graphe de $\varphi_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)}|_{[a; b]}$
 par une suite finie de troncaux de
 Confinement (cf. figure --) et
 appliquer la prop. 2 sur chaque troncau.

Etapes : - utiliser la compacite de $[a; b]$
 pour construire une suite finie de troncaux
 de confinement qui recouvre le graphe de $\varphi_{(t_0; \gamma_0; \lambda_0)}|_{[a; b]}$

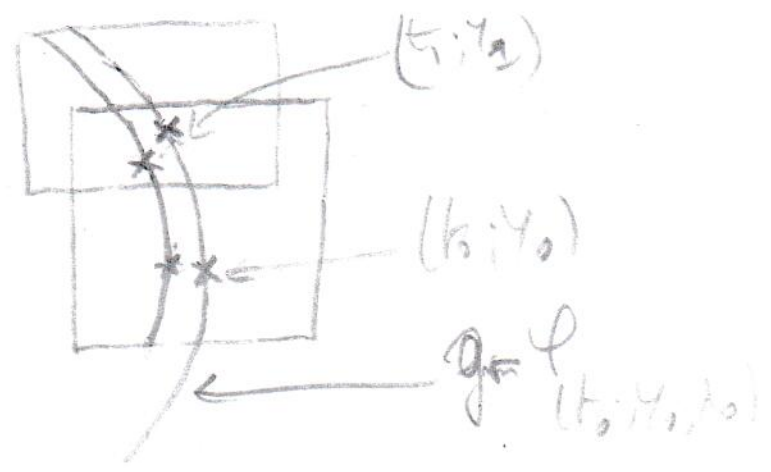
- optimisation de la suite : on elimine
 d'eventuels troncaux
 inutiles et on
 prepare aussi

par ex :



- Preuve (simultanee) de 1) et 2) !

Partant du
 troncau contenant
 $(t_0; \gamma_0)$



on prolonge
 les s.l. construites dans ce troncau
 au troncau suivant (resp. precedent).
 Et on continue par réc. sur le reste du troncau.

— on utilise la compacité de $[a; b]$
 sous la forme de la propriété de Borel-Lebesgue
 (cf. TD).

(exposer la preuve sans paramètre).

Preuve de la prop. 3 : On pose $\varphi_0 := \varphi_{(t_0, \gamma_0, \lambda_0)}$

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b < b'$ et $[a; b] \subset I_{(t_0, \gamma_0, \lambda_0)}$

Pour chaque $p \in [a; b]$, il existe un tonneau
 de confinement $T_p = [p - \alpha_p; p + \alpha_p] \times B(\varphi_0(p); \beta_p) \times B(\lambda_0; \delta_p)$
 au point $(p; \varphi_0(p); \lambda_0)$ (cf. prop. 2).

Comme $[a; b]$ est compact et comme

$$[a; b] \subset \bigcup_{p \in [a; b]} \underbrace{[p - \frac{1}{2}\alpha_p; p + \frac{1}{2}\alpha_p]}_{I_p \text{ intérieure}}, \quad (\text{cf. figure 5.a}).$$

il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de $[a; b]$ tq.

$$[a; b] \subset \bigcup_{p \in \mathcal{F}} I_p. \quad (*) \quad (\text{voir figure 5.b.})$$

En particulier, le graphe de $\varphi_0|_{[a; b]}$ est à l'intérieur
 de la réunion des tonneaux T_p , pour $p \in \mathcal{F}$.
 (cf. prop. 2).

On va construire par récurrence une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$
 tq. la prop. R(N) suivante est vraie :

$$R(N) = (I(N) \text{ ou } Q(N))$$

avec