$\mathcal{P}(N)$ Pour $j \in [0;N] \cap \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{j} I_{\rho_k}$ est un int. ouvert contenant a mais pas b et $a < \sup I_{\rho_j}$
et, si $N \geq 1$, pour $j \in [0;N-1] \cap \mathbb{N}$ on a, en posant, $\mathcal{F}_j = \{\rho \in \mathcal{F} ; \overbrace{\rho_j + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_j}}^{= \sup I_{\rho_j}} \in I_\rho\}$,
$\max\{\sup I_\rho ; \rho \in \mathcal{F}_j\}$ est atteint en $\sup I_{\rho_{j+1}} > a$ et $\inf I_{\rho_{j+1}} > \inf I_{\rho_j}$

et $\vee$

$Q(N)$ Il existe $j \in [0;N] \cap \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{j} I_{\rho_k}$ est un intervalle ouvert contenant a et b, $\rho_k = \rho_j$ pour $N \geq k \geq j$, et $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $0 \leq k < j$.

$\mathcal{F}_a := \{\rho \in \mathcal{F} ; a \in I_\rho\}$.
Par $(*)$, $\mathcal{F}_a \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}_a$ est fini. Soit $\rho_0 \in \mathcal{F}_a$ tq., pour tout $\rho \in \mathcal{F}_a$, $\sup I_\rho \leq \sup I_{\rho_0}$. On a $a < \sup I_{\rho_0}$. Si $b \in I_{\rho_0}$, $Q(0)$ est vraie. Si $b \notin I_{\rho_0}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On a montré $R(0)$.

1er cas : $b \in I_{\rho_0}$. Alors $Q(0)$ est vraie. On choisit $\rho_1 = \rho_0$.
$Q(1)$ est vraie (avec $j = 0$).

2ème cas : $b \notin I_{\rho_0}$. Donc $\rho_0 + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_0} = \sup I_{\rho_0} \in [a ; b[$. Par $(*)$,
$\mathcal{F}_0 = \{\rho \in \mathcal{F} ; \overbrace{\rho_0 + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_0}}^{= \sup I_{\rho_0}} \in I_\rho\}$ est non vide et fini. Soit $\rho_1 \in \mathcal{F}_0$ tq. pour tout $\rho \in \mathcal{F}_0$, $\sup I_\rho \leq \sup I_{\rho_1}$. Donc $\overbrace{\rho_0 + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_0}}^{\sup I_{\rho_0}} > \overbrace{\rho_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\rho_1}}^{\inf I_{\rho_1}}$.
$I_{\rho_0} \cup I_{\rho_1}$ est un intervalle ouvert contenant a et $\sup I_{\rho_1} > a$.
Supposons que $\inf I_{\rho_1} \leq \inf I_{\rho_0}$ alors
$\inf I_{\rho_1} \leq \inf I_{\rho_0} = \rho_0 - \frac{1}{2}\alpha_{\rho_0} < a < \rho_0 + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_0} = \sup I_{\rho_0} < \rho_1 + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_1} = \sup I_{\rho_1}$
Donc $\rho_1 \in \mathcal{F}_a$ et $\sup I_{\rho_0} < \sup I_{\rho_1}$. Contr. avec la déf. de ρ_0. Donc $\inf I_{\rho_1} > \inf I_{\rho_0}$. Si $b \notin I_{\rho_1}$ alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie et si $b \in I_{\rho_1}$ alors $Q(1)$ est vraie (avec $j = 1$).

On a montré $R(1)$.

Supposons que $R(N)$ est vraie pour un $N \geq 1$.

1^er^ cas : $Q(N)$ est vraie. On pose $\rho_{N+1} = \rho_N$ et $Q(N+1)$ est vraie (avec le j que pour $Q(N)$) ;

2^è^ cas : $Q(N)$ est fausse. Donc $P(N)$ est vraie, Comme $b \notin \bigcup_{k=0}^{N} I_{\rho_k}$, qui est un int. contenant a, et $a < \sup I_{\rho_N}$ on a $a < \sup I_{\rho_N} < b$. Par $(*)$,

$\tilde{F}_N = \{\rho \in F ; \rho_N + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_N} \in I_\rho\}$ est non vide et fini.

Soit $\rho_{N+1} \in \tilde{F}_N$ tq., pour tout $\rho \in \tilde{F}_N$, $\sup I_\rho \leq \sup I_{\rho_{N+1}}$.

Comme $\sup I_{\rho_N} = \rho_N + \frac{1}{2}\alpha_{\rho_N} \in I_{\rho_{N+1}}$, $\sup I_{\rho_{N+1}} > a$ et $\inf I_{\rho_{N+1}} < \sup I_{\rho_N}$. Donc $\bigcup_{k=0}^{N+1} I_{\rho_k}$ est un intervalle ouvert contenant a.

Supposons que $\inf I_{\rho_{N+1}} \leq \inf I_{\rho_N}$. Alors

$\inf I_{\rho_{N+1}} \leq \inf I_{\rho_N} < \sup I_{\rho_{N-1}} < \sup I_{\rho_N} < \sup I_{\rho_N}$

$\rho_{N+1} \in \tilde{F}_{\rho_{N-1}}$ avec $\sup I_{\rho_N} < \sup I_{\rho_N}$. Contr. avec la déf. de ρ_N. Donc $\inf I_{\rho_{N+1}} > \inf I_{\rho_N}$.

Si $b \notin I_{\rho_{N+1}}$ alors $P(N+1)$ est vraie.

Si $b \in I_{\rho_{N+1}}$ alors $Q(N+1)$ est vraie (avec $j = N+1$).

On a montré $R(N+1)$.

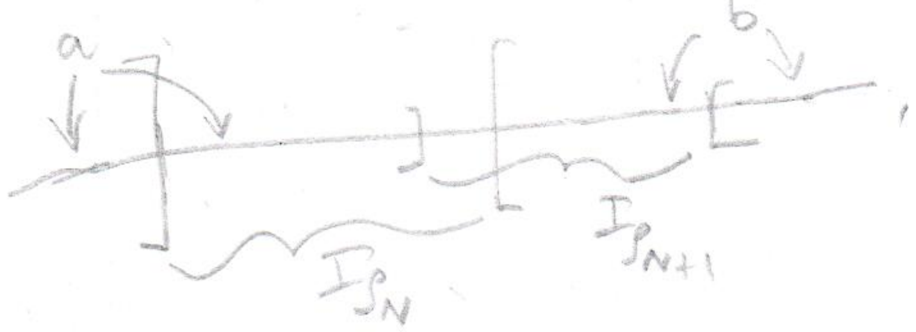
Par le Th. de récu., on a construit une suite $(\rho_N)_{N \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tq. $R(N)$ est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Supposons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $P(N)$ est vraie.

Alors, on vérifie par récu. que $(\inf I_{\rho_N})_N$ est str. ↗.

Donc, pour $k \neq p$, $I_{\rho_k} \neq I_{\rho_p}$ et $\rho_k \neq \rho_p$.
Contr. avec le fait que $\mathcal{F}$ est fini.

Soit $N_{[a;b]}$ le premier N t.q. $Q(N)$ est vraie.
Pour $N < N_{[a;b]}$, $\mathcal{I}(N)$ est vraie et
$\inf I_{\rho_N} < \inf I_{\rho_{N+1}} < \sup I_{\rho_N} < \sup I_{\rho_{N+1}}$:



voir figure 5.C.

On obtient donc un recouvrement finis du graphe de $\varphi_0|[a;b]$ par des tonneaux de confinement.

Voir figure 6.

Il reste à montrer les points 1) et 2) de la proposition 3.

Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{I}(N)$ la prop. suivante :
Pour tout intervalle compact $[a;b] \subset J_{(t_0;y_0;\lambda_0)}$ $(a < t_0 < b)$ qui peut être recouvert par $N+1$ intervalles $I_{\rho_0}, I_{\rho_1}, \dots, I_{\rho_N}$ t.q.

(**) $\forall j \in [0;N] \cap \mathbb{N}$, $\inf I_{\rho_j} < \inf I_{\rho_{j+1}} < \sup I_{\rho_j} < \sup I_{\rho_{j+1}}$
et $a < \sup I_{\rho_0}$:

1) il existe $\delta_N>0$, $\gamma_N>0$ t.q. pour tout $(\tau;\Gamma;\lambda)\in\Omega$ avec $\tau\in[a;b]$, $\|\Gamma-\psi_0(\tau)\|<\delta_N$ et $\|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\gamma_N$, la sol. max. $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ de (E_λ) valant Γ à $t=\tau$ est définie sur $[a;b]$.

2) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\mu_N(\varepsilon)>0$ t.q., pour tout $(\tau;\Gamma;\lambda)$ comme ci-dessus, on ait

$$\left(\|\Gamma-\psi_0(\tau)\|<\mu_N(\varepsilon) \text{ et } \|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\mu_N(\varepsilon)\right)\Longrightarrow \sup_{t\in[a;b]}\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(t)-\psi_0(t)\|<\varepsilon,$$

$**$ ~~cas TD~~.

<u>voir figure 6</u>

$\mathcal{S}(0)$ est vraie d'après la prop. 2 appliquée au tonneau du $\rho\in[a;b]$ tel que $[a;b]\subset I_\rho$ (avec Y_0 remplacé par $\psi_0(\rho)$)

Supposons $\mathcal{S}(N)$ vraie pour un $N\in\mathbb{N}$. Soit $a<t_0<b$ dans $J_{(t_0;Y_0;\lambda_0)}$ t.q. $[a;b]$ soit recouvert par $(N+1)+1$ int. $I_{\rho_0}, I_{\rho_1}, \dots, I_{\rho_{N+1}}$ vérifiant $(**)$ avec N remplacé par $N+1$.

Soit $c\in]\inf I_{\rho_1};\sup I_{\rho_0}[$.

Par $\mathcal{S}(0)$, 1) pour $[a;c]$, il existe $\delta_0>0$ et $\gamma_0>0$ t.q. pour $\tau'\in[a;c]$,

$$\left(\|\Gamma-\psi_0(\tau')\|<\delta_0 \text{ et } \|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\gamma_0\right)\Longrightarrow\left(\varphi_{(\tau';\Gamma;\lambda)} \text{ est déf. sur } [a;c]\right).$$

Par $\mathcal{S}(N)$, 1) pour $[c;b]$, il existe $\delta_N>0$ et $\gamma_N>0$ t.q. pour $\tau'\in[c;b]$,

$$\left(\|\Gamma-\psi_0(\tau')\|<\delta_N \text{ et } \|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\gamma_N\right)\Longrightarrow\left(\varphi_{(\tau';\Gamma;\lambda)} \text{ est définie sur } [c;b]\right).$$

Par $\mathcal{S}(0)$, 2) pour $[a;c]$ et $\varepsilon=\delta_N$, il existe $\mu_0(\delta_N)>0$ t.q., pour $\tau'\in[a;c]$,

$$\|\Gamma-\psi_0(\tau')\|<\mu_0(\delta_N) \text{ et } \|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\mu_0(\delta_N)\Longrightarrow\|\varphi_{(\tau';\Gamma;\lambda)}-\psi_0\|_{\infty,[a;c]}<\delta_N.$$

Par $\mathcal{S}(N)$, 2) pour $[c;b]$ et $\varepsilon=\delta_0$, il existe $\mu_N(\delta_0)>0$ t.q., pour $\tau'\in[c;b]$

$$\|\Gamma-\psi_0(\tau')\|<\mu_N(\delta_0) \text{ et } \|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda<\mu_N(\delta_0)\Longrightarrow\|\varphi_{(\tau';\Gamma;\lambda)}-\psi_0\|_{\infty,[c;b]}<\delta_1.$$

On pose $\gamma_{N+1}=\min(\gamma_0;\gamma_N;\mu_N(\delta_0);\mu_0(\delta_N))$ et $\delta_{N+1}=\min(\delta_0;\delta_N;\mu_N(\delta_0);\mu_0(\delta_N))$.