Soit $\tau \in [a;b]$.

<u>1er cas</u> : ~~...~~, $\tau \in [a;c]$.

Donc $\tau \in [a;c]$. Soit Γ, λ tq. $\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_{N+1}$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_{N+1}$. Comme $\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_0$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_0$, $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;c]$. Comme

$$\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_{N+1} \leq \mu_0(\delta_N) \text{ et } \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_{N+1} \leq \mu_0(\delta_N)$$

on a $\|\overbrace{\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(c)}^{\Gamma_c} - \psi_0(c)\| < \delta_N$

et comme $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_N$, $\varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}$ est déf. sur $[c;b]$.

Comme $\varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}$ et $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ sont des sol. qui coïncident à $t=c$ elles sont égales. Donc $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;b]$.

<u>2è cas</u> : ~~$\tau \in \bigcup_{k=1}^{N+1} I_k$~~, $\tau \in]c;b]$.

Donc $\tau \in [c;b]$. Soit Γ, λ tq. $\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_{N+1}$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_{N+1}$

Comme $\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_N$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_N$, $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[c;b]$.

Comme

$$\|\Gamma - \psi_0(\tau)\| < \delta_{N+1} \leq \mu_N(\delta_0) \text{ et } \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_{N+1} \leq \mu_N(\delta_0)$$

on a $\|\overbrace{\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(c)}^{\Gamma_c} - \psi_0(c)\| < \delta_0$.

Comme $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \gamma_0$, $\varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}$ est déf. sur $[a;c]$.

Comme préc., $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)} = \varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}$ donc $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;b]$.

On a montré $\mathcal{S}(N+1), 1)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par $\mathcal{S}(0), 2)$ pour $[a;c]$ il existe $\mu_0(\varepsilon) > 0$ tq. pour $\tau' \in [a;c]$,

$\|\Gamma - \psi_0(\tau')\| < \mu_0(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_0(\varepsilon) \Rightarrow \|\varphi_{(\tau';\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty, [a;c]} < \varepsilon$.

Par $\mathcal{G}(N), 2)$ pour $[c;b]$, il existe $\mu_N(\varepsilon)>0$ tq., pour $z' \in [c;b]$,

$\|\Gamma - \psi_0(z')\| < \mu_N(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_N(\varepsilon) \Rightarrow \|\varphi_{(z';\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty [c;b]} < \varepsilon$.

Par $\mathcal{G}(0), 2)$ pour $[a;c]$ et ε remplacé par $\mu_N(\varepsilon)$, il existe $\mu_0(\mu_N(\varepsilon))$ tq., pour $z' \in [a;c]$,

$\|\Gamma - \psi_0(z')\| < \mu_0(\mu_N(\varepsilon))$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_0(\mu_N(\varepsilon)) \Rightarrow \|\varphi_{(z';\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty [a;c]} < \mu_N(\varepsilon)$.

Par $\mathcal{G}(N), 2)$ pour $[c;b]$ et ε remplacé par $\mu_0(\varepsilon)$, il existe $\mu_N(\mu_0(\varepsilon))$ tq., pour $z' \in [c;b]$,

$\|\Gamma - \psi_0(z')\| < \mu_N(\mu_0(\varepsilon))$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_N(\mu_0(\varepsilon)) \Rightarrow \|\varphi_{(z';\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty [c;b]} < \mu_0(\varepsilon)$.

On pose $\mu_{N+1}(\varepsilon) = \min(\mu_0(\varepsilon); \mu_N(\varepsilon); \mu_0(\mu_N(\varepsilon)); \mu_N(\mu_0(\varepsilon)))$.

Soit $z \in [a;b]$.

<u>1er cas</u> : $z \in I_{\rho_0}$. Donc $z \in [a;c]$. Pour (Γ, λ) tq.

$\|\Gamma - \psi_0(z)\| < \mu_{N+1}(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_{N+1}(\varepsilon)$ on a

$\|\Gamma - \psi_0(z)\| < \mu_0(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_0(\varepsilon)$ donc $\|\varphi_{(z;\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty [a;c]} < \varepsilon$.

Comme $\|\Gamma - \psi_0(z)\| < \mu_0(\mu_N(\varepsilon))$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_0(\mu_N(\varepsilon))$,

$$\|\underbrace{\varphi_{(z;\Gamma;\lambda)}(c)}_{\Gamma_c} - \psi_0(c)\| < \mu_N(\varepsilon).$$

Donc $\|\underset{\underset{\varphi_{(z;\Gamma;\lambda)}\,!}{\|}}{\varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}} - \psi_0\|_{\infty [c;b]} < \varepsilon$.

<u>2è cas</u> : $z \in \bigcup_{k=1}^{N+1} I_{\rho_k}$. Donc $z \in [c;b]$. Pour (Γ, λ) tq.

$\|\Gamma - \psi_0(z)\| < \mu_{N+1}(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_{N+1}(\varepsilon)$, on a

$\|\Gamma - \psi_0(z)\| < \mu_N(\varepsilon)$ et $\|\lambda - \lambda_0\| < \mu_N(\varepsilon)$ donc $\|\varphi_{(z;\Gamma;\lambda)} - \psi_0\|_{\infty [c;b]} < \varepsilon$.

Comme $\|\Gamma - \varphi_0(\tau)\| < \mu_N(\mu_0(\varepsilon))$ et $\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \mu_N(\mu_0(\varepsilon))$,

$$\|\underbrace{\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(c)}_{\Gamma_c} - \varphi_0(c)\| < \mu_0(\varepsilon).$$

Donc $\|\underset{\underset{\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}}{\|}}{\varphi_{(c;\Gamma_c;\lambda)}} - \varphi_0\|_{\infty,[a;b]} < \varepsilon$.

On a montré $\mathcal{S}(N+1), 2)$.

$\mathcal{S}(N)$ est donc héréditaire. Par le Th. de récurr.,

$\mathcal{S}(N)$ est vraie pour tout N.

Soit $(a_0;b_0) \in J^2_{(t_0;y_0;\lambda_0)}$ tq. $a_0 < t_0 < b_0$.

Par $Q(N_{[a_0;b_0]})$, $[a_0;b_0]$ peut être recouvert par $N_{[a_0;b_0]}+1$ int. $I_{\delta_0}, \dots, I_{\delta_{N[a_0;b_0]}}$ vérifiant $(**)$ avec N remplacé par $N_{[a_0;b_0]}$.

Par $\mathcal{S}(N_{[a_0;b_0]})$, les prop. 1) et 2) de la prop. 3 pour $[a_0;b_0]$ sont vraies. $\square$.

Cor. 1: Soit $(t_0;y_0;\lambda_0) \in \Omega$ et $\varphi_0 = \varphi_{(t_0;y_0;\lambda_0)}$.
Soit $(a;b) \in J^2_{(t_0;y_0;\lambda_0)}$ tq. $a < t_0 < b$. Il existe un voisin. V de $(t_0;y_0;\lambda_0)$ dans Ω tq., pour tout $(\tau;\Gamma;\lambda) \in V$, $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;b]$. De plus, l'appl.

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & (C^0([a;b];F), \|\cdot\|_{\infty,[a;b]}) \\ (\tau;\Gamma;\lambda) & \longmapsto & \varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)} \end{array}$$

$\hookrightarrow \|g\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{t\in[a;b]} \|g(t)\|$.

est continue en $(t_0;y_0;\lambda_0)$.

Preuve: on appl. la prop. 3 à $[a;b]$. Il existe $\delta_0>0$ et $\gamma_0>0$ tq.

$$(\mathcal{S}) : \left.\begin{array}{l} \tau \in [a;b] \\ \text{et } \|\Gamma - \varphi_0(\tau)\| < \delta_0 \\ \text{et } \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \delta_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)} \text{ est déf. sur } [a;b].$$

Comme φ_0 est conti. en t_0, il existe $\alpha_0 > 0$ t.q. $]t_0-\alpha_0; t_0+\alpha_0[\subset [a;b]$ et

$$(Q) : \quad |\tau - t_0| < \alpha_0 \Longrightarrow \|\varphi_0(\tau) - Y_0\| < \frac{\delta_0}{2}.$$

Soit $V =]t_0-\alpha_0; t_0+\alpha_0[\times B(Y_0; \frac{\delta_0}{2}[\times B(\lambda_0; \delta_0[$. C'est un vois. de $(t_0; Y_0; \lambda_0)$. Pour $(\tau;\Gamma;\lambda) \in V$, on a, par (Q),

$$\|\Gamma - \varphi_0(\tau)\| \leq \|\Gamma - Y_0\| + \|Y_0 - \varphi_0(\tau)\| < \delta_0.$$

Donc, par $(\mathcal{S})$, $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le 2) de la prop. 3 appl. à $[a;b]$, il existe $\delta > 0$ t.q. $\delta \leq \frac{\delta_0}{2}$, $\delta \leq \delta_0$ et

$$(\mathcal{S}_\varepsilon) : \left.\begin{array}{l} (\tau;\Gamma;\lambda) \in \Omega \\ \text{et } \tau \in [a;b] \\ \text{et } \|\Gamma - \varphi_0(\tau)\| < \delta \\ \text{et } \|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)} - \varphi_0\right\|_{\infty}^{[a;b]} < \varepsilon.$$

Par conti. de φ_0 en t_0, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q. $]t_0-\alpha_1; t_0+\alpha_1[\subset]t_0-\alpha_0; t_0+\alpha_0[\subset [a;b]$ et

$$(Q') : \quad |t - t_0| < \alpha_1 \Longrightarrow \|\varphi_0(t) - Y_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Soit $V_0 =]t_0-\alpha_1; t_0+\alpha_1[\times B(Y_0; \frac{\delta}{2}[\times B(\lambda_0; \delta[\subset V$. Pour $(\tau;\Gamma;\lambda) \in V_0$,

$$\|\Gamma - \varphi_0(\tau)\| \leq \|\Gamma - Y_0\| + \|Y_0 - \varphi_0(\tau)\| < \delta \text{ par } (Q').$$

Donc, par $(\mathcal{S}_\varepsilon)$, $\left\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)} - \varphi_0\right\|_{\infty}^{[a;b]} < \varepsilon$. $\square$

<u>Cor. 2</u> : Soit $\Theta = \{(t;\tau;\Gamma;\lambda) \in \mathbb{R} \times \Omega \,;\, t \in J_{(\tau;\Gamma;\lambda)}\}$.

C'est un ouvert de $\mathbb{R} \times \Omega$ et l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \Theta & \longrightarrow & F \\ (t;\tau;\Gamma;\lambda) & \longmapsto & \varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(t) \end{array} \quad \text{est } \underline{\text{continue}}.$$

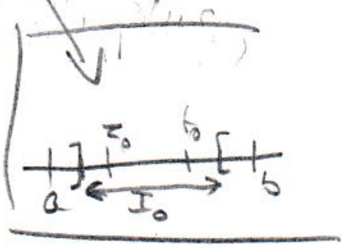
<u>Preuve</u> : On montre que Θ est voisinage de chacun de ses pts.

Soit $(t_0;\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0) \in \Theta$. En parti. $(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0) \in \Omega$.

Il existe $(a;b)\in J^2_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}$ t.q. $a<b$, $\tau_0\in]a;b[$ et $t_0\in]a;b[$.

Par le cor. 1, il existe un vois. ouv. V de $(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)$ t.q. pour $(\tau;\Gamma;\lambda)\in V$, $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est déf. sur $[a;b]$ donc aussi sur $I_0 := \left]\frac{\min(\tau_0;t_0)+a}{2};\frac{\max(\tau_0;t_0)+b}{2}\right[$ $(\subset [a;b])$.

Comme $t_0\in I_0$, $(t_0;\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)\in \underbrace{I_0\times V}_{\text{ouvert}}$.



Si $(t;\tau;\Gamma;\lambda)\in I_0\times V$ alors $\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$ est définie sur $[a;b]$ donc sur I_0. Donc $t\in J_{(\tau;\Gamma;\lambda)}$.

D'où $I_0\times V\subset\Theta$. On a montré que Θ est ouvert.

On montre que ϕ est conti. en $(t_0;\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)\in\Theta$. Soit $\varepsilon>0$. Soit a, b et V comme ci-dessus. Par la conti. de Φ en $(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)$ (cf. cor. 1), il existe V_0 un vois. de $(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)$ inclus dans V t.q.

$$(\tau;\Gamma;\lambda)\in V \Longrightarrow \|\Phi(\tau;\Gamma;\lambda)-\Phi(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)\|_{\infty,[a;b]}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\alpha_0>0$ t.q. $I_0 :=]\tau_0-\alpha_0;\tau_0+\alpha_0[\subset[a;b]$. Par conti. de $\Phi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}$ en $t=t_0$, il existe $\alpha_1\in]0;\alpha_0]$ t.q.

$$|t-t_0|<\alpha_1 \Rightarrow \|\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t)-\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t_0)\|<\varepsilon/2 .$$

Pour $(t;\tau;\Gamma;\lambda)\in]t_0-\alpha_1;t_0+\alpha_1[\times V$, on a donc

$$\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(t)-\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t_0)\|\leqslant\|\varphi_{(\tau;\Gamma;\lambda)}(t)-\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t)\|+\|\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t)-\varphi_{(\tau_0;\Gamma_0;\lambda_0)}(t_0)\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\ \square$$