5 - Théorème des bouts.

Dans le cadre du Théorème de C.L., on s'intéresse maintenant au temps d'existence des solutions max.

Différents comportements sont possibles, y compris dans le cas $U = \underset{\text{int.}}{I} \times F$.

Voir T.D.

On peut identifier des causes de la "mort des sol. max.".

Exemple 1 : Soit $U = I \times F$, I int. ouv. de $\mathbb{R}$

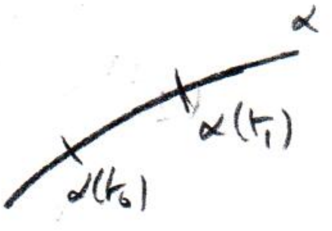
$f : U \to F$ conti. loca. lipsch./2 var.

et (E) l'éq. associée.

Soit $t_0 \in I$, $x_0 \in F$. On supp. que la sol. max. α de (E) valant x_0 à $t = t_0$ est définie sur I tout entier et est injective. Soit $t_1 \in I$ t.q. $t_1 > t_0$ donc $\alpha(t_1) \neq x_0$.

Soit $g : I \times F \setminus \{x_0\} \to F$
$(t; x) \mapsto f(t; x)$.

g vérifie C.L sur $I \times F \setminus \{x_0\}$.
Soit (G) l'éq. associée.
La sol. max. $\tilde{\beta}$ de (G) valant $\alpha(t_1)$ à la date t_1 coïncide avec α sur $]t_0; t_1]$.



Néc. $\tilde{\beta}$ n'est pas déf. en t_0.
Le temps d'existence de $\tilde{\beta}$ est limité pour cause de sortie du domaine de déf. de g.

<u>Ex. 2</u> : $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($F = \mathbb{R}$!)

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & 1+x^2 \end{array}. \quad C^1$$

$$(E) : \quad y' = 1+y^2.$$

C.L. s'applique (f est C^1 en dim. finie !)

Soit $\alpha : J \to E$ la sol. max. de (E) valant 0 en 0. Pour $t \in J$, $1+\alpha(t)^2$ ne s'annule pas donc

$$\frac{\alpha'(t)}{1+\alpha(t)^2} = 1$$

donc, pour $t \in J$,

$$\int_0^t \frac{\alpha'(s)}{1+\alpha(s)^2}\,ds = \int_0^t 1 = t.$$

Soit $t = \int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)} \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctan}(\alpha(t)) - 0$

Donc $t \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$!!

D'où $J \subset]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Soit $\beta :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto \tan t$

β est C^1, $\beta(0) = 0$ et β est sol. de (E).
Par unicité des C.C., $\alpha = \beta$ et $J =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Donc $\lim_{t \to \pm\frac{\pi}{2}} \alpha(t) = \pm\infty$.

Limitation du temps d'existence pour cause d'explosion en temps fini.

On va voir : – des conditions suffisantes pour avoir l'existence globale d'une sol. max.
– des informations sur le comportement d'une sol. max. au bord de son domaine de déf.

Cadre : Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times F$, $(F; \|\cdot\|)$ Banach.

Soit $f : U \to F$ conti. et loca. lipsch./2^e va

Soit (E) l'éq. diff. associée. Soit $\alpha : J \to F$ une sol. max..

Th. de bouts : Dans le cadre précédent, soit $(t_0; x_0) \in U$ et $\alpha : J \to F$ la sol. max. de (E) valant x_0 à $t = t_0$. Soit $\tilde{\alpha} : J \to J \times F$, $t \mapsto (t; \alpha(t))$.

(0). J est un int. ouv.

(1). Soit $\tilde{K}$ un compact inclu dans U. Alors $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$ est un compact inclu dans J (on dit que $\tilde{\alpha}$ est propre.).

Rq : La prop. (1) dit que " $\tilde{\alpha}$ sort de tout compact inclu ds. U ". En effet, comme $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$ est un compact inclu ds J, il existe $s_- < s_+$ ds J tq. $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K}) \subset [s_-; s_+] \subset J$.

Donc, pour $t > s_+$ ou $t < s_-$, $\tilde{\alpha}(t) \notin \tilde{K}$.

Preuve : (0) déjà fait (cf. C.L. version sol. max.).

(1). Soit $s_- = \inf \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$ et $s_+ = \sup \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$.

Supposons qu'on ait montré ($s_- \in J$ et $s_+ \in J$) (*).

alors $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K}) \subset [s_-; s_+]$.

Comme $\tilde{K}$ est fermé et $\tilde{\alpha}$ conti. $\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{K})$ est