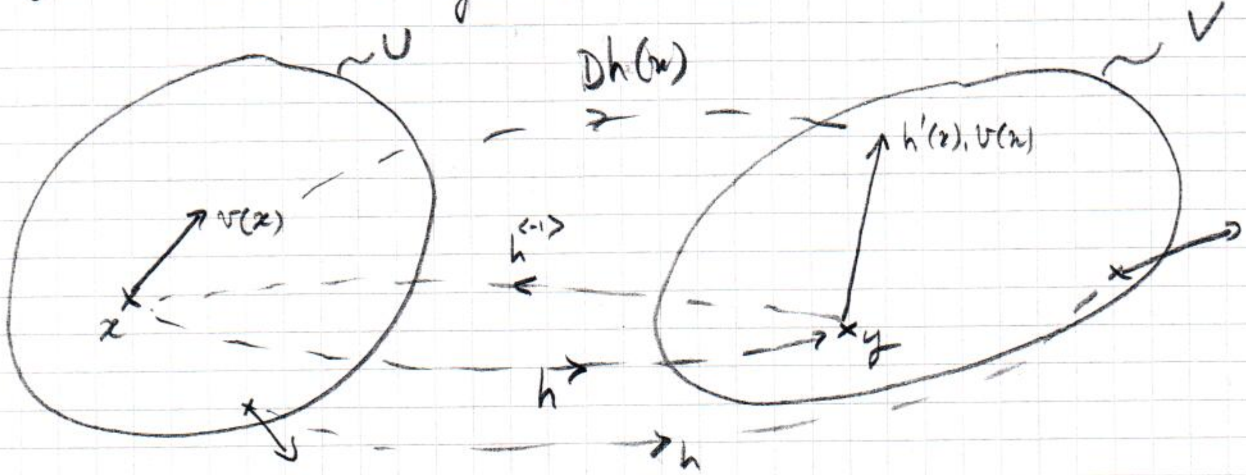
10). Redressement.

On se place dans le cadre précédent avec $\dim F = n \in \mathbb{N}^*$

Déf.: Soit E et F deux $\mathbb{K}$.ev. de dim. n. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Soit U un ouv. de E et $h : U \longrightarrow V \ (\subset F)$ un C^{r+1}-difféo. de U sur V (V est en fait un ouvert de F). Soit $v : U \to E$ de classe C^r. On appelle champ image par h de v le champ de vect. :

$$h_* v : \begin{array}{l} V \longrightarrow F \\ y \longmapsto Dh(h^{<-1>}(y)).v(h^{<-1>}(y)) \end{array}$$

où $h^{<-1>}$ est la bij. réci. de h.



Rq. : * dans le cadre de la déf. $h_* v$ est de classe C^r car Dh est de classe C^r et $h^{<-1>}$ est C^r.

* Si $h_1 : U \to V$ et $h_2 : V \to U$, C^r-difféo., alors $(h_2 \circ h_1)_* v = h_{2*}(h_{1*} v)$. De plus $Id_{E*} v = v$.

* Soit $\alpha : I_\alpha \longrightarrow U$ une sol. max. de $x' = v(x)$.

Alors $h \circ \alpha$ est une sol. de $y' = (h_* v)(y)$. En effet, pour $t \in I_\alpha$,

$$(h\circ\alpha)'(t) = Dh(\alpha(t)).\alpha'(t) = Dh(\alpha(t)).v(\alpha(t)) = Dh\left(h^{<-1>}(h\circ\alpha(t))\right).v\left(h^{<-1>}(h\circ\alpha(t))\right)$$
$$= (h_* v)(h\circ\alpha(t)).$$

* Si $\beta : J_\beta \longrightarrow V$ est une sol. max. de $y' = (V_* h)(y)$ alors $h^{<-1>} \circ \beta$ est une sol. de $x' = h^{<-1>}_*(h_* v)(x)$, par la rq. préc. or $h^{<-1>}_*(h_* v) = (h^{<-1>} \circ h)_*(v) = Id_{E*} v = v$.

Donc $h^{<-1>} \circ \beta$ est sol. de $x' = v(x)$.

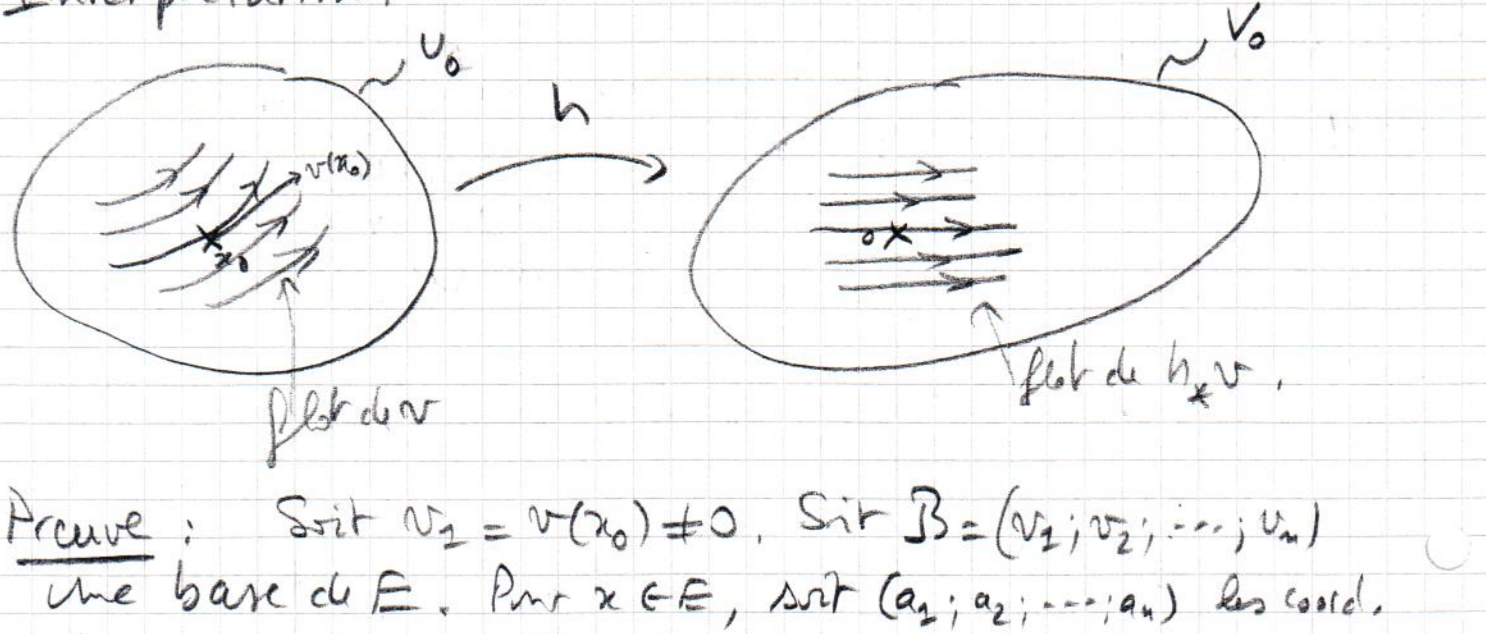
* Plus précisément, pour $\alpha : J_\alpha \to U$ sol. max. de $x' = v(x)$
$h \circ \alpha$ est sol. max. de $h_* v$.

En effet : on sait que $h \circ \alpha$ est sol. de $y' = (h_* v)(y)$.
C'est donc la restriction à J_α d'une sol. max. $\beta : J_\beta \to V$ de l'éq.
Donc $J_\alpha \subset J_\beta$. Comme $h^{<-1>} \circ \beta$ est une sol. de $x' = v(x)$
et comme $h^{<-1>} \circ \beta$ coïncide avec $h^{<-1>} \circ h \circ \alpha = \alpha$ sur J_α,
$h^{<-1>} \circ \beta$ est une restriction de α donc $J_\beta \subset J_\alpha$. D'où $J_\beta = J_\alpha$
et $h \circ \alpha$ est sol. max. de $y' = (h_* v)(y)$.

Th. (Redressement du champ.)
Soit E un $\underline{\mathbb{R}}$-ev. de dim. $n \in \mathbb{N}^*$, soit U un ouv. de E
et $v : U \to E$ un ch. de vect. de classe C^r ($r \in \mathbb{N}^*$).
Soit $x_0 \in U$ t.q. $\underline{v(x_0) \neq 0}$. Il existe un vois. U_0
de x_0, inclu dans U, un vois. V_0 de 0 dans $\mathbb{K}^n$ et $h : U_0 \to V_0$
un C^1-difféo. de U_0 sur V_0 t.q.

$$h_* v : \begin{array}{ccc} V_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ y & \longmapsto & (1; 0; \dots; 0). \end{array}$$

Interprétation :



<u>Preuve</u> : Soit $v_1 = v(x_0) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (v_1; v_2; \dots; v_n)$
une base de E. Pour $x \in E$, soit $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ les coord.
de x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $\delta > 0$ soit

$$A_\delta =]-\delta;\delta[\times \{x \in E ; \sup_{2 \le j \le n} |a_j| < \delta \text{ et } |a_1 - 1| < \delta\}.$$

C'est un vois. ouv. de $(0;x_0)$ dans $\mathbb{R} \times U$ si δ est assez petit.

~~En~~ diminuant éventuellement δ, on peut supposer que le flot ψ de v est déf. sur A_δ

(cf. para. sur la conti. du flot).

Soit φ : $]-\delta;\delta[^n \longrightarrow E$

$$(b_1; \dots ; b_n) \longmapsto \psi(b_1; \underbrace{x_0 + \sum_{j=2}^n b_j v_j}_{\in A_\delta})$$

Par la régularité du flot ψ, φ est C^1.

De plus $\varphi(0) = \psi(0;x_0) = x_0$.

On calcule $D\varphi(0)$:

$$\partial_1 \varphi(0) = \partial_t \psi(b_1; x_0)_{|b_1 = 0} = v(\psi(0;x_0)) = v(x_0) = v_1.$$

On remarque que $\varphi(0; b_2; \dots ; b_n) = \psi(0; x_0 + \sum_{j=2}^n a_j v_j)$

$$= x_0 + \sum_{j=2}^n a_j v_j$$

donc, pour $j \geq 2$, $\partial_j \varphi(0) = v_j$.

La matrice de $D\varphi(0)$ depuis la base cano. de $\mathbb{R}^n$ vers la base $\mathcal{B}$ est donc I_n. Elle est donc inversible.

Par le th. d'inversion locale, il existe un vois. V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un vois. U_0 de x_0 dans U_1 tq. la restriction φ_r de φ à V_0 soit un C^1-difféo. de V_0 sur U_0.

Soit e_1 le ch. de vecteur : $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto (1;0;\dots;0) \in \mathbb{R}^n$.

On calcule $\varphi_{r*} e_1$: Pour $x \in U_0$,

$$\varphi_{r*} e_1(x) = D\varphi(\varphi_r^{<-1>}(x)) \cdot e_1(\varphi_r^{<-1>}(x)) = D\varphi(\varphi_r^{<-1>}(x)) \cdot (1;0;\dots;0)$$

$$= (\partial_1 \varphi_r)(\varphi_r^{<-1>}(x)) = \partial_t \psi(b_1; x_0 + \sum_{j=2}^n b_j v_j)$$

où $\varphi_r^{<-1>}(x) = (b_1; b_2; \dots ; b_n)$. D'où $\varphi_{r*} e_1(x) = v(\psi(b_1; x_0 + \sum_{j=2}^n b_j v_j))$ soit

$\varphi_{r*} e_1(x) = v(\varphi_r(b_1;\dots;b_n)) = v(x)$. $h = \varphi_r^{<-1>}$ convient. $\square$

<u>Corollaire</u> : Sous les hyp. du Th., il existe un vois. U_0 de x_0, inclu dans U, et $f_2, \dots, f_n$ des intégrales premières de v, définies et de classe C^r sur U_0, tq.

1). Pour tout $x \in U_0$, $(Df_2(x); Df_3(x); \dots; Df_n(x))$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$;

2). Si g est une inté. 1ère de v sur U_0 alors il existe un vois. W_0 de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\varphi : W_0 \to U_0$, de classe C^r, tq.

$\forall x \in U_0,\quad g(x) = \varphi(f_2(x); \dots; f_n(x))$;

3) Pour $(d_2; \dots; d_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bigcap_{2 \leq j \leq n} f_j^{-1}(d_j)$ est soit vide soit la restriction à U_0 d'une traj. de v.

De plus, si $x \in \bigcap_{2 \leq j \leq n} f_j^{-1}(d_j)$ alors

$(v(x); \nabla f_2(x); \dots; \nabla f_n(x))$ est une base de E.

<u>Rq</u> : le corollaire donne un résultat local. Lorsque les résultats sont valables pour U_0 remplacé par U, on dit de v est <u>intégrable</u> (voir un exemple plus loin). En général, on a seulement le résultat local du corollaire.

<u>Preuve</u> : On applique le Th. du redressement. Pour $2 \leq j \leq n$, soit $c_j : V_0 \to \mathbb{R}$

$$(a_1; \dots; a_n) \mapsto a_j.$$

1). Soit $f_j = c_j \circ h$. f_j est C^r et

$Df_j(x) = Dc_j(h(x)) \circ Dh(x)$.

Comme (Dc_j) est une famille libre et la comp. à dte par $Dh(x)$

est inversible (car h est un difféo.)

$(Df_j(x))_{2\leq j\leq n}$ est libre. De plus, pour $2\leq j\leq n$ et $x\in U_0$,

$$L_v f_j(x) = Df_j(x).v(x) = DC_j(h(x))\circ Dh(x).v(x)$$
$$= DC_j(h(x)).h_*v(x) = DC_j(h(x)).e_1 = 0.$$

2). On montre :

g intégr. 1ère de v sur U_0 $\iff$ $g\circ h^{\langle -1\rangle}$ est une intégr. 1ère de e_1 sur V_1.

On a :

$$L_{e_1}(g\circ h^{\langle -1\rangle})(y) = D(g\circ h^{\langle -1\rangle})(y).e_1 = Dg(h^{\langle -1\rangle}(y))\circ Dh^{\langle -1\rangle}(y).e_1$$
$$= Dg(h^{\langle -1\rangle}(y))\circ Dh^{\langle -1\rangle}(y).h_*v(h^{\langle -1\rangle}(y))$$
$$= Dg(h^{\langle -1\rangle}(y))\circ[Dh(h^{\langle -1\rangle}(y))]^{-1}\circ Dh(h^{\langle -1\rangle}(y)).v(h^{\langle -1\rangle}(y))$$
$$= Dg(h^{\langle -1\rangle}(y)).v(h^{\langle -1\rangle}(y)) = L_v g(h^{\langle -1\rangle}(y)).$$

D'où $L_v g = 0$ sur U_0 $\iff$ $L_{e_1}(g\circ h^{\langle -1\rangle}) = 0$ sur V_0.

Soit $\tilde{g}$ une intégr. 1ère de e_1. On a donc $\partial_1\tilde{g} = 0$ sur V_0.
Donc $\tilde{g}$ ne dépend que des var. $(y_2;\dots;y_n)$ de $y=(y_1;\dots;y_n)\in\mathbb{R}^n$. Donc il existe V_0' un vois. de 0 ds $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\varphi : V_0'\to\mathbb{R}$ tq., pour $y\in V_0$,

$$\tilde{g}(y) = \varphi(y_2;\dots;y_n) = \varphi(C_2(y);\dots;C_n(y)).$$

Donc $(\tilde{g}\circ h)(h^{\langle -1\rangle}(y)) = \varphi(f_2(h^{\langle -1\rangle}(y));\dots;f_n(h^{\langle -1\rangle}(y)))$.

Soit g une intégr. 1ère de v sur U_0. D'après l'équivalence précédente, $\tilde{g} = g\circ h^{\langle -1\rangle}$ est une intégr. 1ère de e_1 et, par le raisonnement précé., il existe $\varphi : V_0'\to\mathbb{R}$ tq, pour $x\in U_0$,

$$g(x) = \tilde{g}\circ h(x) = \varphi(f_2(x);\dots;f_n(x)).$$

3). Soit $x\in\bigcap_{2\leq j\leq n} f_j^{-1}(d_j)$.

Soit $\tilde{J} = \{t \in J_x ; \varphi(t;x) \in U_0\}$. Pour $2 \leq j \leq n$, $\varphi(\cdot;x)(\tilde{J})$ rencontre $f_j^{-1}(d_j)$ en x donc, par un résultat du para. 7, $\varphi(\cdot;x)(\tilde{J}) \subset f_j^{-1}(d_j)$.

De plus, pour $t \in \tilde{J}$,

$v(\varphi(t;x)) \circ \nabla f_j(\varphi(t;x)) = 0$

car f_j est une inté. 1ère de v.

Donc $v(x) = v(\varphi(0;x))$ est $\perp$ à $\nabla f_j(x)$.

Comme $(\nabla f_j(x))_{2 \leq j \leq n}$ est libre, $(v(x); \nabla f_2(x); \ldots; \nabla f_n(x))$ est une base de E.

On a vu que $\varphi(\cdot;x)(\tilde{J}) \subset \bigcap_{2 \leq j \leq n} f_j^{-1}(d_j)$.

Montrons l'égalité.

Comme, pour $2 \leq j \leq n$, $d_j = f_j(x) = c_j \circ h(x)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tq. $h(x) = (t; d_2; \ldots; d_n) = \varphi_{e_1}(t; (0; d_2; \ldots; d_n))$ (où φ_{e_1} est le flot de e_1). Par les rq. préliminaires, $x = \varphi_v(t; h^{<-1>}((0; d_2; \ldots; d_n)))$. Donc $\varphi_v(-t; x) = h^{<-1>}((0; d_2; \ldots; d_n)) =: \hat{x}$.

Si $y \in \left(\bigcap_{2 \leq j \leq n} f_j^{-1}(d_j)\right) \cap U_0$ alors il existe $t' \in \mathbb{R}$ tq.

$h(y) = (t'; d_2; \ldots; d_n)$ donc $y = \varphi_v(t'; \hat{x})$

d'où $y = \varphi_v(t'; \varphi_v(-t; x)) = \varphi_v(t' - t; x)$.

Donc $y \in \varphi_v(\cdot;x)(\tilde{J})$. $\square$.

<u>Rq</u> : Dans le cas du champ hamiltonien associé à
$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x;\xi) \mapsto x^2 + \xi^2$$
on a une version globale du résultat du <u>cor</u>. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$

($(0;0)$ est pt. d'annulation du champ).