

11). Points d'équilibre.

1104

Def.: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -esp. de Banach, U un ouvert de E et $v: U \rightarrow E$ un champ de vecteurs de C.L. Soit $a \in U$. On dit que a est un point d'équilibre de v si $v(a) = 0$.

Dans le cadre de la def., on se demande ce qui se passe près d'un pt. d'équilibre.

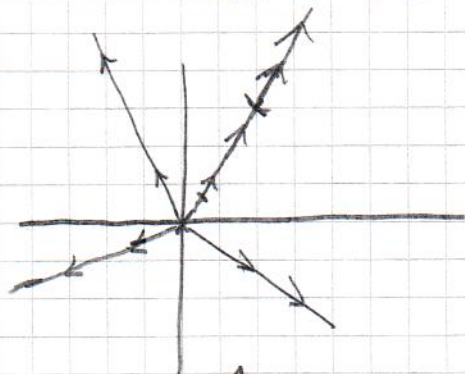
Exemples:

* Pour $\varepsilon \in]-1; 1[$, soit $v_\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x; y) \mapsto \varepsilon(x; y)$.

v_ε est linéaire.

$0 = (0; 0)$ est le seul pt. d'équilibre de v_ε .

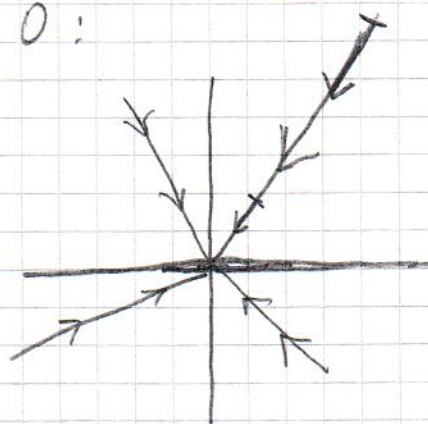
Sol. max. près de 0:



$\varepsilon = 1$

Convergence vers 0

qd $t \rightarrow -\infty$.



$\varepsilon = -1$

Convergence vers 0

qd $t \rightarrow +\infty$

On peut vérifier cela avec la formule explicite des sol. max.

* $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (linéaire).
 $(x; y) \mapsto (x; -y)$

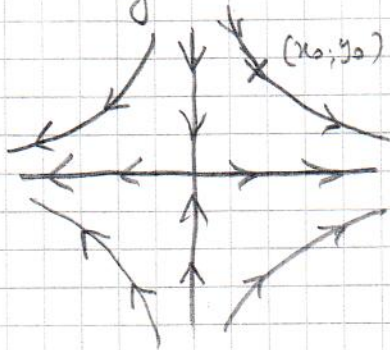
Seul pt. d'équil.: $(0; 0)$.

Sol. max. valant (x_0, y_0) à $t=0$: Pour $t \in \mathbb{R}$,

105

$$x(t) = x_0 e^t \text{ et } y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)y(t) = x_0 y_0$. Donc la traj. est une branche d'hyperbole :



cv. vers 0 en $+\infty$ si $x_0 = 0$?

cv. vers 0 en $-\infty$ si $y_0 = 0$?

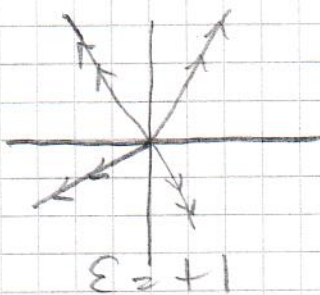
pas de cv. en $\pm\infty$ si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$?

* Pour $\varepsilon \in]-1; 1[$, soit $w_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

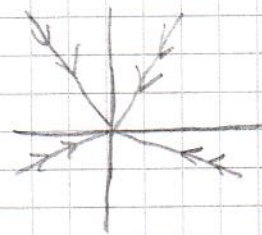
(non linéaire)

$$(x, y) \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+x^2+y^2}} (x, y)$$

0 : seul pt. d'équilibre.



cv. vers 0 ?
en $-\infty$



cv. vers 0 ?
en $+\infty$

Prop. : Dans le cadre de la déf. précédente, on a :

* a pt. d'équil. de v ssi l'orbite de a selon v est $\{a\}$.

* Si, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha : [t_0; +\infty[\rightarrow U$ est une sol. de l'éq. associée à v tq. $a = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha$ existe dans U alors $v(a) = 0$.

Preuve : voir le para. 7. $\square$

Rq : Par le th. des bouts, la situation suivante est exclue pour une sol. max. $\alpha : J \rightarrow U$ de l'éq. associée à v (cf. prop. 1, para. 9) :

faux $\rightarrow (b_+ = \sup J < +\infty \text{ et } \lim_{b \rightarrow b_+} \alpha \text{ existe dans } U)$

Déf. : Soit $v: U \rightarrow E$ un champ de C.L et
 $a \in U$ tq. $v(a) = 0$.

106

* On dit que a est positivement stable ("zo" stable)
(au sens de Lyapunov) si, pour tout vois. U_1 de a
il existe un vois. U_2 de a tq.

$\forall x \in U_2, \forall t \geq 0, \psi(t; x)$ est défini et $\psi(t; x) \in U_1$.

* On dit que a est positivement, asymptotiquement
stable ("zo" asymp. stable) (au sens de Lyapunov)
ou que a est attractif

Si a est positivement stable et il existe un vois.
 U_2 de a tq.

$\forall x \in U_2, \forall t \geq 0, \psi(t; x)$ est déf. et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t; x) = a$.

* Le domaine (ou bassin) d'attraction d'un pt.
attractif a est

$$B_a^+ = \{x \in U; \forall t \geq 0, \psi(t; x) \text{ existe et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t; x) = a\}.$$

* On dit que a est exponentiellement
attractif si a est attractif et s'il existe $\delta > 0$,
 $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ tq. $B(a; \delta] \subset B_a^+$ et
 $\forall x \in B(a; \delta], \forall t \geq 0, \|\psi(t; x) - a\| \leq \beta \|x - a\| e^{-\alpha t}$.

* On dit que a est négativement stable (au sens de Lyapunov)
(resp. répulsif, resp. exponentiellement répulsif)
si a est "zo" stable (resp. attractif, resp.
exponentiellement attractif) pour $\underline{= -v}$.

* Le domaine (ou bassin) de répulsion d'un pt. répulsif a

$$B_a^- = \{x \in U; \forall t \leq 0, \psi(t; x) \text{ est déf. et } \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t; x) = a\}.$$

Rg. Si $\varphi_v(t; x)$ est déf. pour tout $t \geq 0$
 $(\xleftrightarrow{t \rightarrow +\infty} \text{pt. } 0, v)$

alors $\varphi_{-v}(t; x)$ est déf. pour tout $t \leq 0$ et, pour $t \leq 0$,

$$\varphi_{-v}(t; x) = \varphi_v(-t; x).$$

Cela résulte du fait que $\varphi_v(-0; x)$ est un sol. max. de l'éq. associée à $-v$ et vaut $\varphi_{-v}(0; x) = x$ à $t=0$.

Exemples et contre-exemples.

* Dans $E = \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), soit $v: E \rightarrow E$
 $x \mapsto -x$.

v est complet et, pour $(t; x) \in \mathbb{R} \times E$,

$$\varphi_v(t; x) = e^t x. \text{ Dne } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_v(t; x) = 0.$$

Dne 0 , qui est pt. d'équil. de v , est " ≥ 0 " stable :

Pour $U_1 \in \mathcal{V}(0)$, il existe $\delta > 0$ t.q. $B(0; \delta] \subset U_1$.

On choisit $U_2 = B(0; \delta]$. Pour $x \in B(0; \delta]$ et $t \geq 0$

$$\text{on a } \|\varphi(t; x)\| = \|e^t x\| = e^t \|x\| \leq \|x\| < \delta$$

dne $\varphi(t; x) \in U_2 \subset U_1$,

On a mieux : 0 est attractif.

$$\text{Pour tout } x \in U_2 \text{ et } t \geq 0, \text{ on a } \|\varphi(t; x)\| \leq e^t \|x\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Dne } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; x) = 0.$$

En fait, ceci est vrai pour $x \in \mathbb{R}^d$ dne $B_0^+ = \mathbb{R}^d$.

Encore mieux : 0 est exponentiellement attractif.

En effet, soit $\alpha = \beta = 1$ et $\delta > 0$ q.c.q. On a, pour $x \in B(0; \delta]$, $\|\varphi(t; x) - 0\| = e^{-t} \|x\| = 1 e^{-1t} \|x - 0\|.$

* ϕ est répulsif par de ch.

108

$$v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x \mapsto x,$$

* Soit $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x; y) \mapsto (-x; 0).$$

l'pt. d'équi. de v = $\{(0; y); y \in \mathbb{R}\}$,

Sol. max. valant $(x_0; y_0)$ à $t=0$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par $y_0 \in \mathbb{R}$, $(0; y_0)$ est "z0" stable :

Soit $U_1 \in \mathcal{V}((0; y_0))$, Il existe $\delta > 0$ tq.

$B((0; y_0); \delta] \subset U_1$. On choisit $U_2 = B((0; y_0); \delta]$.

Par $z = (x_1; y_1) \in U_2$, $\psi(t; z)$ est déf. pour $t \geq 0$ et

$$\|\psi(t; z) - (0; y_0)\| \leq \|e^{-t} x_1; y_1 - y_0\|$$

$$\leq \|z - (0; y_0)\| < \delta.$$

Donc $\psi(t; z) \in U_2 \subset U_1$.

$(0; y_0)$ n'est pas attractif! En effet, par tout vois U_2 de $(0; y_0)$, par tout $z = (x_1; y_1) \in U_2$ avec $y_1 \neq 0$, $\psi(t; z) \not\rightarrow (0; y_0)$.

On a $B_{(0; y_0)}^+ = \{(x; y_0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$,

c'est un ensemble d'intérieur vide.

* $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$. v est complet, a un

seul pt. d'équil. qui est exponentiellement attractif : à vérifier en exercice.