$$* \quad v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{x|x|}{1+x^2}.$$

v est complet, 0 est le seul pt. d'équil.
Il est attractif mais pas exp. attractif.
À vérifier en exercice.

Théorie de Lyapunov.

Déf : Soit $v : U \to E$ un ch. de vect. de C^1. Soit $a \in U$, $V \in \mathcal{V}(a)$ et $f : V \to \mathbb{R}$ continue, C^1 sur $V \setminus \{a\}$ tq. $f(a) = 0$ et, pour $x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) > 0$.

* Si $L_v f \leq 0$ sur $V \setminus \{a\}$, on dit que f est une fonction de Lyapunov pour v et a.

* Si, pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $L_v f(x) < 0$, on dit que f est une fonction forte de Lyapunov pour v et a.

Exemples : Soit $(E, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un esp. euclidien et $a \in E$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x-a\|$.

On remarque que f est C^1 sur $E \setminus \{a\}$. De plus, pour $x \neq a$,
$$L_v f(x) = \left\langle \frac{x-a}{\|x-a\|} ; v(x) \right\rangle.$$

Si, pour x près de a et $x \neq a$, $\langle x-a ; v(x) \rangle \leq 0$, f est une fonct. de Lyapunov pour v et a.

Si, pour x près de a et $x \neq a$, $\langle x-a ; v(x) \rangle < 0$, f est une fonct. forte de Lyapunov pour v et a.

S'il existe $\alpha > 0$ tq., pour x près de a et $x \neq a$, on ait $\langle x-a ; v(x) \rangle \leq -\alpha \|x-a\|^2$ alors $L_v f(x) \leq -\alpha f(x)$ et f est une fonct. forte de Lyapunov pour v et a.

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et $v(x) = A.x$, pour $x \in E$.
Les pts. d'équi. de v sont les élé. du noyau de A.
Pour $x \in E$, on a

$$\langle x - 0 ; v(x) \rangle = \langle x ; Ax \rangle .$$

Si A est auto-adj., et a toutes ses v.p. ≤ 0 alors $\|\cdot\|$ est une fonct. de Lyapunov pour v et 0.
Si A est auto-adj., et a toutes ses v.p. < 0 $\|\cdot\|$ est une fonct. forte de Lyapunov pour v et 0.

$\|\cdot\|$ <u>n'est pas</u> une fonct. de Lyapunov pour v et 0 si A a une v.p. > 0.

<u>Th.</u> : Soit $v : U \to E$, C^1, $\dim E < +\infty$.
Soit $a \in U$ t.q. $v(a) = 0$. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $f : V \to \mathbb{R}$ conti., C^1 sur $V \setminus \{a\}$.

1). Si f est une fonct. de Lyapunov pour v et a alors a est "≥ 0" stable.

2). Si f est une fonct. forte de Lyapunov pour v et a alors a est attractif.

3). S'il existe $\alpha > 0$ t.q., pour $x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) > 0$, $L_v f(x) \leq -\alpha f(x)$ et $f(a) = 0$, alors il existe $U_1 \in \mathcal{V}(a)$ t.q. $U_1 \subset V$, pour tout $x \in U_1$, $\varphi(t;x)$ est, pour $t \geq 0$, défini et appartient à V et

$$f(\varphi(t;x)) \leq e^{-\alpha t} f(x).$$

<u>Rq</u> : Si $f = \|\cdot - a\|$ vérifie le 3) alors a est exp. attractif.
C'est le cas si $v(x) = Ax$ où A est auto-adj. dans un esp. eucli. E de dim. finie et a toutes ses v.p. < 0. Il suffit de prendre $\alpha = \inf \{ |\lambda| ; \lambda \text{ v.p. de } A \}$.

Preuve : On supp. $f(a)=0$. Il existe $\delta>0$ t.q. $B(a;2\delta[\subset V (\subset U)$. Soit $K = B(a;\delta]$ et $U_0 = \{x \in B(a;\delta[\,;\, f(x) < 1\}$. 111

K est un vois. compact de a et $U_0 = B(a;\delta[\cap f^{-1}(]-\infty;1[)$
De plus $U_0 \subset \overline{U_0} \subset K \subset V$.

1- On supp que f est une fonct. de Lyapunov en a.
Pour $x \in U_0$, soit $K_x = \{y \in K ;\ f(y) \leq f(x)\}$.
Comme $K_x = K \cap f^{-1}(]-\infty; f(x)])$, K_x est fermé dans le compact K donc compact. Par cont. de $\varphi(\cdot;x)$ il existe $T>0$ t.q. $\varphi(\cdot;x)$ est dif. sur $[0;T[$ et à valeurs dans $U_0 \setminus \{a\}$. Pour $t \in [0;T[$,

$$\frac{d}{dt}(f\circ\varphi(t;x)) = L_v f(\varphi(t;x)) \leq 0$$

puisque f est une fonct. de Lyapunov. Donc $f\circ\varphi(\cdot;x)$ est $\downarrow$ sur $[0;T[$ donc à valeurs dans K_x sur $[0;T[$.
Sur $[0;T[$, $\varphi(\cdot;x)$ est sol. de l'éq. diff. associée à $v_{|U_0}$ valant x à $t=0$. Par unicité de C.L. pour $v_{|U_0}$, $\varphi(\cdot;x)$ coïncide sur $[0;T[$ avec la sol. max. $\gamma : J \to U_0$ de l'éq. ass. à $v_{|U_0}$, valant x en 0.
Si $\sup J < \infty$ alors les prop. précédentes sont vraies pour $T = \sup J$. Donc $\gamma_+^{-1}(K_x) = [0; \sup J[$.
Contr. avec le th. des bouts.
D'où $\sup J = +\infty$. De plus, les prop. précédentes sont valables pour tout $T>0$. Donc $\varphi(\cdot;x)$ est dif. sur $\mathbb{R}^+$ et à val. dans $K_x \subset K$ sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $U_1 \in \mathcal{V}(a)$. Il existe $\delta>0$ t.q. $B(a;2\delta[\subset U_1 \cap V$.
D'après ce qui précède, on a, pour tout $x \in U_0$ avec $U_0 = \{y \in B(a;\delta[\,;\, f(y) < 1\}$, $\varphi(\cdot;x)$ est dif. sur $\mathbb{R}^+$ et à val. dans $K = B(a;\delta] \subset U_1$. Donc a est "≥ 0" stable.

2). On supp. que f est une fonction de Lyapunov forte pour v et a. En particulier, 1) s'applique. Pour $x \in U_0$ (le m̂.), $\varphi(\cdot\,;x)$ est déf. sur $\mathbb{R}^+$ et à val. dans K_x. Cette fois, par hyp., $f\circ\varphi(\cdot\,;x)$ est str. ↓ et tjs >0 sur $\mathbb{R}^+$. Donc $l := \lim\limits_{+\infty} f\circ\varphi(\cdot\,;x)$ existe dans $\mathbb{R}^+$.

Supposons $l>0$. Néc^t. $f(x)>l$ et, sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi(\cdot\,;x)$ est à val. dans le fermé $f^{-1}([l;f(x)]) \cap K_x \subset K_x\setminus\{a\}$.
Comme il est inclu dans le compact K_x, il est aussi compact. Donc $L_v f$ atteint son sup. c sur ce compact et donc $c<0$. (car $L_v f<0$ sur $V\setminus\{a\}$). Donc, pour $t\geq 0$,

$$0 \leq f\circ\varphi(t;x) = f(x) + \int_0^t L_v f(\varphi(s;x))\,ds$$
$$\leq f(x) + c\int_0^t ds = f(x) + ct \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Contr. Donc $l = \lim\limits_{+\infty} f\circ\varphi(\cdot\,;x) = 0$.

On va en déduire que $\lim\limits_{+\infty} \varphi(\cdot\,;x) = a$.

Soit $\delta_1 \in]0;\delta[$ et

$$\lambda_1 = \inf\{f(z)\,;\ z\in \overbrace{B(a;\delta]\setminus B(a;\delta_1[}^{\text{fermé}}\}.$$
$\hookrightarrow \subset B(a;\delta] = K$ compact.

Comme $f>0$ sur $V\setminus\{a\}$, conti. sur V, λ_1 est une val. de f donc est >0.

(*) $\left[\begin{array}{l}\text{Si, pour un } z\in K, \text{ on a } f(z)<\lambda_1 \text{ alors, par déf. de } \lambda_1,\\ z\notin K\setminus B(a;\delta_1[\text{ donc } z\in B(a;\delta_1[.\end{array}\right.$

Comme $\lim\limits_{+\infty} f\circ\varphi(\cdot\,;x)=0$, il existe $T_1>0$ tq.

$$t\geq T_1 \implies 0\leq f\circ\varphi(t;x)<\lambda_1.$$

Donc, pour $t\geq T_1$, $f(\varphi(t;x))<\lambda_1$ donc, par (*), $\varphi(t;x)\in B(a;\delta_1[$.
On a montré que $\lim\limits_{+\infty}\varphi(\cdot\,;x)=a$. Donc a est attractif.

3). Par hyp. i, on peut appl. 2) et 3).

Pour $x \in U_0$ et $t \geq 0$, on a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t} f \circ \psi(t;x)\right) = e^{\alpha t}\left(\alpha f \circ \psi(t;x) + L_v f(\psi(t;x))\right) \leq 0.$$

par hyp.

D'où, pour $t \geq 0$,

$$e^{\alpha t} f \circ \psi(t;x) \leq e^{\alpha \times 0} f \circ \psi(0;x) = f(x).$$

Donc

$$f \circ \psi(t;x) \leq e^{-\alpha t} f(x). \quad \square$$