12). Points d'équilibre. Cas linéaire.

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-esp. de Banach, $A \in \mathcal{L}(F)$ et $\tilde{b} \in F$. Soit $\tilde{v} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & A.x + \tilde{b} \end{array}$.

Si $\tilde{b}$ n'appartient pas à l'image de A, $\tilde{v}$ n'a pas de pt. d'équilibre (cf. $A.x + \tilde{b} = 0 \iff \tilde{b} = A(-x)$).

Supposons qu'il existe $b \in F$ tq. $A.b = \tilde{b}$. L'éq. diff. $(\tilde{E})$ associée à $\tilde{v}$ est donc : $y' = A.(y+b)$.

Soit (E) l'éq. diff. associée à $v : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & A.x \end{array}$.

Pour $\alpha : \mathbb{R} \to F$, on a :

α sol. max. de $(\tilde{E}) \iff \alpha + b$ sol. max. de (E).

et, pour $a \in F$,

$$\tilde{v}(a) = 0 \iff v(a+b) = 0.$$

Donc on peut ramener l'étude du flot de $\tilde{v}$ près d'un point d'équilibre de $\tilde{v}$ à celle du flot de v près d'un point d'équilibre de v.

Étude de v : On a

$$\{ \text{pt. d'équil. de } v \} = \operatorname{Ker} A \quad (\text{le noyau de } A),$$

On suppose que $\operatorname{Ker} A$ a un supplémentaire (topologique) dans E :

Il existe un s.esp. G de F tq. $F = \operatorname{Ker} A \oplus G$.

On suppose de plus que la proj. P sur G, parallèlement à $\operatorname{Ker} A$, est continue.

Rq : cette hypothèse est automatiquement remplie si $\dim F < \infty$. En dimension infinie, ce n'est pas le cas mais il existe des appl. linéaires cont. A pour lesquelles elle est vraie.

Soit $x \in F$. Il existe $x_0 \in \ker A$ et $g \in G$ tq. $x = x_0 + g$. La fonct. $t \mapsto x_0 + \psi(t;g)$ est sol. de (E) et vaut $x_0 + g = x$ à $t=0$. Par unicité de C.L., on a donc, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t;x) = x_0 + \psi(t;g)$. De plus, comme les traj. de v forment une partition, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t;g) \notin \ker A.$$

On pose $Q = \mathrm{I} - P$. C'est la proj. sur $\ker A$, parallèlement à G. En écrivant, $A = PAP + PAQ + QAP + QAQ$
$= PAP + 0 + QAP + 0$,

on vérifie par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = (PAP)^n + QAP(PAP)^{n-1}$$

Donc, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left((PAP)^n + QAP(PAP)^{n-1} \right)$$

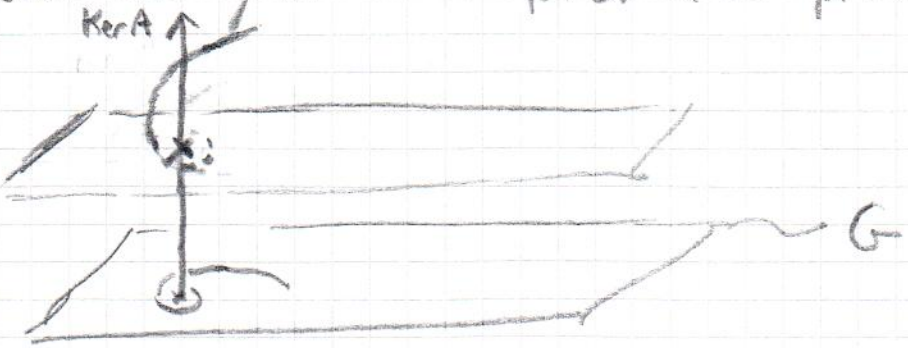
$$= \exp(tPAP) + QAP \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (PAP)^{n-1} \right) P$$

La restriction à G de PAP est inversible. Soit A_G^{-1} son inverse. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \exp(tPAP) + (QAP) A_G^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (PAP)^n \frac{t^n}{n!}$$

$$= \exp(tPAP) + (QAP) A_G^{-1} \left(\exp(tPAP) - \mathrm{I} \right).$$

Donc, si l'on connaît le comportement du flot de PAP près de 0 (son seul pt. d'équil.), on peut déduire celui du flot de A près d'un pt. d'équil. $x_0 \in \ker A$



On se ramène donc à l'étude du point d'équilibre 0 pour $A \in \mathcal{L}(F)$ avec $\ker A = \{0\}$.

On se restreint maintenant au cas de dimension finie :

$1 \leqslant n = \dim F < +\infty$. En prenant une base dans F, on se ramène à l'étude du pt. d'équil. 0 pour l'en. ch.

$$u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad x \longmapsto M.x$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $u_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $x \longmapsto M.x$ $\left(u_{\mathbb{C}} = u \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\right)$.

Soit P_M le poly. caract. de M. Soit

$$\mathrm{Spec}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} ;\ P_M(\lambda) = 0\}.$$

Th. 1 (Décomposition de Dunford).

Il existe $(D ; N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ t.q. $DN = ND$, $u_{\mathbb{C}} = D + N$, D est diagonalisable et N est nilpotente.

Preuve : admise.

En particulier, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q.

$$PMP^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{PDP^{-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}}_{PNP^{-1}}.$$

Les v.p. de D sont celles de $u_{\mathbb{C}}$ avec m̂. multiplicité.

Appl. : Pour $t \in \mathbb{R}$, il existe $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ t.q.

$$\exp(tM) = \exp(tD) \sum_{k=0}^{n-1} t^k Q_k.$$

En effet, comme D et N commutent, on a

$\exp(tM) = \exp(tD)\exp(tN)$ et $\exp(tN) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k$.

Th. 2 : On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Alors 0 est exponentiellement attractif.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On a, par Dunford,

$$\|\psi(t;x)\| = \|\exp(tM)x\| \leq \|\exp(tM)\|_0 \cdot \|x\|$$

$$\leq \|\exp(tD)\exp(tN)\|_0 \cdot \|x\|$$

$$\leq \|\exp(tD)\|_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} |t|^k \|Q_k\|_0 \right) \|x\|,$$

or $\exp(tD) = \exp\left(t P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P\right)$

$$= P^{-1} \exp t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P$$

donc $$\|\exp(tD)\|_0 \leq \|P^{-1}\|_0 \left(\sup_{\lambda \in \mathrm{Spec}(M)} |e^{t\lambda}| \right) \|P\|_0$$

avec, pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, $|e^{t\lambda}| = e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda)}$.

Soit $\alpha = \min \{ -\mathrm{Re}(\lambda) ; \lambda \in \mathrm{Spec}(M) \} > 0$.

On a

$$\|\exp(tD)\|_0 \leq \|P^{-1}\|_0 \|P\|_0 \, e^{-\alpha t}$$

donc

$$\|\psi(t;x)\| \leq \|P^{-1}\|_0 \|P\|_0 \, e^{-\alpha t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \|Q_k\|_0 \right) \|x\|.$$

Comme, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\lim_{+\infty} e^{-\alpha t} t^k = 0$, on a $\lim_{+\infty} \psi(t;x) = 0$ par le th. des gendarmes.

Cette propriété implique bien sûr que 0 est "≥ 0" stable et même attractif.

Comme les fonct. $t \mapsto t^k e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ sont bornées sur $[0;+\infty[$ (cont. et tendant vers 0 en $+\infty$), il existe $C > 0$ tq.

pour $t \geq 0$,

$\|\Phi(t;x)\| \leq C e^{-\frac{\alpha}{2}t} \|x\|$.

Donc, 0 est exp. attractif. $\square$.

Rq. : * $x \mapsto \|x\|$ est une fonct. forte de Lyapunov pour w.

* Si $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ alors il existe $x \in \mathbb{C}^2$ tq. $\|\exp(tM)x\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

En effet, on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tM) = e^{t\lambda}\left(I_2 + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc, pour $t \geq 0$,

$$\exp(tM)e_2 = e^{t\lambda}\left(I_2 + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{-t\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{borné}} + \underbrace{t e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\|\cdot\| = t e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = t\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty,$$

Donc 0 n'est pas "≥ 0" stable dans ce cas.

* Un autre exemple similaire mais dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$M = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & \\ \hline (0) & & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{array}\right)}_{M_0} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} (0) & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ \hline (0) & \multicolumn{2}{c}{(0)} \end{array}\right)}_{N}.$$

On a $N^3 = 0$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

et $M_0 = P\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} i & 0 & (0) \\ 0 & i & \\ \hline (0) & & \begin{array}{cc} -i & 0 \\ 0 & -i \end{array} \end{array}\right)}_{\in D_0} P^{-1}$. De plus,

$P^{-1}MP = D_0 + N_0$ avec $N_0 = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & (0) \\ (0) & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$

or $D_0 N_0 = N_0 D_0$.

Par un calcul direct, on trouve

$$\exp(tM)P\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Ceci n'est pas borné.

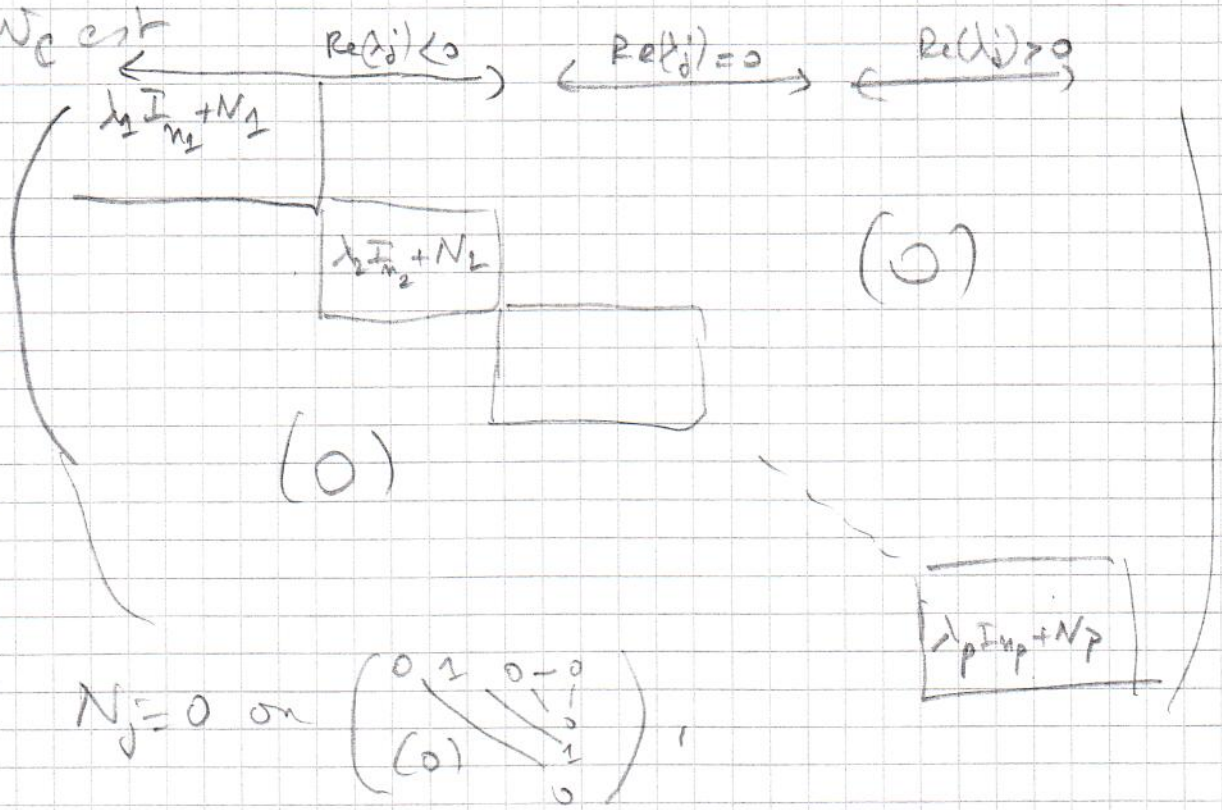
* Si $N=0$ dans l'exemple précédent alors 0 est "≥ 0" stable (mais pas attractif).

* Si $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, on a bien sûr le fait que 0 est exp. répulsif (changer M en $-M$ et $-\infty$ en $+\infty$).

Cadre plus général.

Th. 3 (Décomposition de Jordan).

Il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de w_C est



où $N_j = 0$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$,

Preuve : admise.

Soit $W_\pm$ la restriction de $W_{\mathbb{C}}$ au sous-esp. engendré par les vect. de la base précédente qui sont associés aux v.p. λ_j avec $\pm \mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$.

Corollaire 1 : 0 est exp. attractif pour W_-.
0 ——— répulsif pour W_+.

Preuve : on applique le Th. 2.

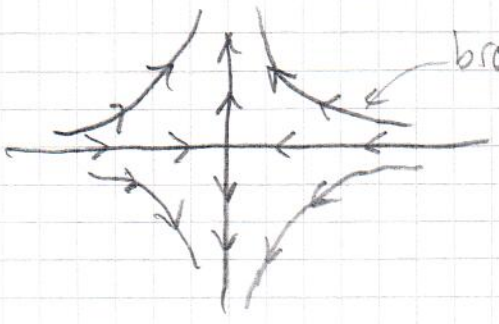
Rq. : * D'après les rq. précédentes, 0 peut ne pas être "≥ 0" (resp. "≤ 0") stable lorsqu'il y a des v.p. λ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Il suffit de considérer la restriction W_0 de $W_{\mathbb{C}}$ à l'esp. vect. eng. par les vect. associés à ces v.p.

* Cependant, 0 est "≥ 0" et "≤ 0" stable pour W_0 si, pour toute v.p. λ_j avec $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ on a $N_j = 0$.

* Les résultats précédents s'appliquent aussi à W dans le cas réel.

Déf : Lorsque, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$, on dit que V (ou W ou $W_{\mathbb{C}}$) est hyperbolique.

Exemple type : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Déf. : Les sous-esp. vect. eng. par les vect. de la base précédente qui sont associés à une v.p. λ avec $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ (resp. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$) est le λ-esp. stable (resp. instable) de w (ou w_E) noté $E_\lambda(w)$ (resp. $\tilde{E}_\lambda(w)$).

Prop. : Soit γ_Δ (γ_i) : $[0;1] \to \mathbb{C}$ une courbe continue, C1 par morceaux, fermée ($\gamma_\Delta(0) = \gamma_\Delta(1)$), orientée positivement, qui entoure seulement les $\lambda \in \mathrm{spec}(M)$ t.q. $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ($\mathrm{Re}(\lambda) > 0$).

Alors $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_\Delta} (z - M)^{-1} dz$ (γ_i) est un proj. $E_\Delta(w)$ ($\tilde{E}_\Delta(w)$).

Preuve : admise.