7. Éq. diff. autonomes.

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un esp. de Banach. Soit V un ouvert de F et $f : V \longrightarrow F$. L'éq. diffé. (E) associée à f est dite autonome parce que f ne dépend pas du temps (la variable des sol. de l'éq. (E)).

Dans toute la suite, on supposera que (E) satisfait les hyp. du Th. de C.L.

Rq. : Si f est C^1 et Df est localement bornée alors C.L. s'applique.
Si f est C^1 et $\dim F < \infty$ alors C.L. s'applique.

En effet, soit $g : \mathbb{R} \times V \to F$ donnée par $g(t;x) = f(x)$. Comme $(t;x) \mapsto x$ est C^1, g est C^1 par composition. De plus, si Df est loca. bornée, $D_2 g$ l'est aussi. D'après un ex. du TD, C.L s'applique. Dans le cas où $\dim F < \infty$, le fait que f soit C^1 implique de Df est loca. bornée.

Prop. 7 : Dans le cadre précédent, soit $y_0 \in V$. L'intervalle $J_{(0;y_0)}$ (de déf. de la sol. $\varphi_{(0;y_0)}$) est un vois. ouv. de 0. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$J_{(t_0;y_0)} = \{t \in \mathbb{R} ;\ t - t_0 \in J_{(0;y_0)}\}$$

et, pour $t \in J_{(t_0;y_0)}$,

$$\phi(t;t_0;y_0) = \phi(t-t_0;0;y_0).$$

Preuve : voir celle de la prop. 6. □

Rq : Si l'on connait $\phi(\cdot;0;y_0)$ alors, par la prop. 7, on connait toutes les sol. max. passant par y_0.
On se concentre donc sur $\phi(\cdot;0;y_0)$ et on pose

$$J_{y_0} := J_{(0;y_0)} \quad \text{et} \quad \varphi(\cdot;y_0) = \phi(\cdot;0;y_0).$$

Prop. 8 : Dans le cadre précédent, soit $\alpha : J \to F$ une sol. max. de (E) telle qu'il existe $(t_1;t_2) \in J^2$ avec $t_1 < t_2$ et $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Alors $J = \mathbb{R}$ et, en posant $T = t_2 - t_1$, α est T-périodique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha(t+T) = \alpha(t).$$

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{P}_+(n)$ la prop. :

$$t_1 + (n+1)T < b_+ \text{ et } \forall t \in [t_1+T; t_1+(n+1)T], \alpha(t) = \alpha(t-T).$$

Comme $t_1 < t_2 < b_+$, α est déf. sur $[t_1; t_1+T]$ et $\alpha(\cdot - T)$ est déf. sur $[t_1+T; t_1+2T]$. De plus,

$$\alpha(\cdot - T)(t_1+T) = \alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_1+T)$$

et $\alpha(\cdot - T)$ est aussi une sol. de (E). Par C.L. et la maximalité de α, α est déf. sur $[t_1+T; t_1+2T]$ et coïncide avec $\alpha(\cdot - T)$ sur cet intervalle. N.é.c. $b_+ > t_1 + 2T$.

Donc $\mathcal{P}_+(1)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}_+(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. Donc α est définie sur $[t_1; t_1+(n+1)T]$ et $\alpha(\cdot - T)$ est définie sur $[t_1+T; t_1+(n+2)T]$.

Comme

$$\alpha(\cdot - T)(t_1+(n+1)T) = \alpha(t_1+nT) \overset{\text{H.R.}}{=} \alpha(t_1+(n+1)T),$$

la maximalité de α implique que α est définie sur $[t_1+T; t_1+((n+1)+1)T]$ et sur cet int. $\alpha = \alpha(\cdot - T)$.

En parti. $b_+ > t_1 + ((n+1)+1)T$ et $\mathcal{P}_+(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de récu., $\mathcal{P}_+(n)$ est vraie pour tout n. Donc $b_+ = +\infty$.

De plus, pour tout $s \in [t_1; +\infty[$, on a $s+T \in [t_1+T; t_1+nT]$ pour un $n \geq 1$ donc $\alpha(s+T) = \alpha((s+T)-T) = \alpha(s)$.

Comme précédemment, on montre par récu. sur $n \in \mathbb{N}^*$ la prop. $\mathcal{P}_-(n)$:

$t_2-(n+1)T > b_-$ et $\forall t\in[t_2-(n+1)T\,;\,t_2-T]$, $\alpha(t)=\alpha(t+T)$.

Donc $b_-=-\infty$. De plus $\alpha=\alpha(\cdot+T)$ sur

$[t_1;+\infty[\ \cup\ ]-\infty;t_1]=\mathbb{R}$. Donc α est T-périodique. □

Rq : Les sol. max. de l'éq. d'inconnue $z : I\to\mathbb{C}$ donnée par $z'=iz$ sont toutes 2π-périodiques.

Déf. : Soit (E) une éq. diff. autonome associée à $f : V\to F$ (vérifiant C.L.). Pour $y_0\in V$, l'ensemble (V ouv de F)

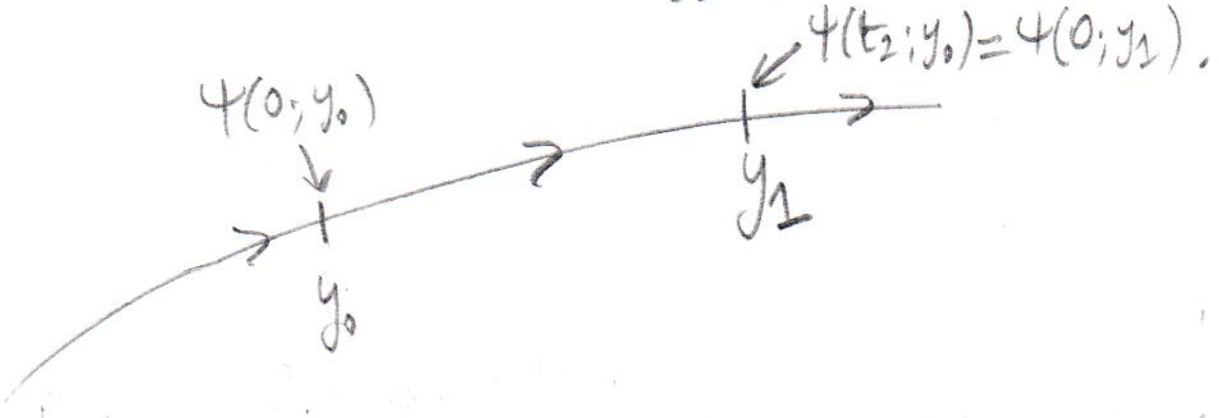
$$\mathcal{C}(y_0) := \varphi(\cdot\,;y_0)(J_{y_0})\subset V$$

est appelé orbite (ou trajectoire) de y_0.

Rq. : Pour $y_0\in V$, $t_1\in J_{y_0}$ et $y_1=\varphi(t_1;y_0)$, y_0 et y_1 ont la m. orbite car $\varphi(\cdot+t_1;y_0)=\varphi(\cdot\,;y_1)$ et $J_{y_1}=\{t-t_1\ ;\ t\in J_{y_0}\}$, par l'unicité de C.L.

Donc $\mathcal{C}(y_0)=\varphi(\cdot\,;y_0)(J_{y_0})=\varphi(\cdot+t_1;y_0)(J_{y_0}-t_1)$

$=\varphi(\cdot\,;y_1)(J_{y_1})$.



Prop. 9. : Dans le cadre précédent, soit $\mathcal{C}$ une orbite. Alors $\mathcal{C}$ est l'orbite de chacun de ses points et l'ensemble des orbites forme une partition de V.

Preuve : Soit $\mathcal{C}$ une orbite. Il existe $y_0 \in V$ tq. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(y_0)$. D'après la rq., $\mathcal{C}$ est aussi l'orbite de tout $y_1 \in \mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux orbites. Il existe $(y_0, y_0') \in V^2$ tq. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(y_0)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(y_0')$.

Supposons $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. Soit $y_1 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Par la rq.
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(y_1) = \mathcal{C}' \text{ donc } \mathcal{C} = \mathcal{C}'.$$
Donc, deux orbites $\neq$ sont disjointes.

De plus, $V \subset \bigcup_{y_0 \in V} \mathcal{C}(y_0) \subset V$ car chaque orbite $\subset V$.

Donc $V = \bigcup_{y_0 \in V} \mathcal{C}(y_0)$. $\square$.

Rq : Soit $\mathcal{R}$ la rel. définie sur V par $x \mathcal{R} y$ ssi x et y ont la m. orbite.

$\mathcal{R}$ est une rel. d'équivalence. Pour tout $x \in V$, on a $\mathcal{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}(x)$.

C'est une conséquence de la prop. 9.

Prop. 10 (Formes des orbites) : On se place dans le cadre précédent. Soit $\mathcal{C}$ une orbite de (E). Soit

$$P = \left(\begin{array}{l}\text{il existe un int. ouv. } J \text{ de } \mathbb{R} \text{ et } \alpha : J \to V \text{ une sol. max. de (E) tq. } \alpha \\ \text{est injective, } \alpha(J) = \mathcal{C} \text{ et, pour } t \in J,\ \alpha'(t) \neq 0.\end{array}\right)$$

et

$$Q = \left(\begin{array}{l}\text{il existe } \alpha : \mathbb{R} \to V \text{ une sol. max. de (E) et} \\ t_1 \neq t_2 \text{ de } \mathbb{R} \text{ tq. } \alpha(\mathbb{R}) = \mathcal{C} \text{ et } \alpha(t_1) = \alpha(t_2)\end{array}\right).$$

Alors la proposition

$$(\mathcal{P} \text{ et non } Q) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{P} \text{ et } Q) \quad (*)$$

est vraie.

Soit

$Q_1 = \Big($ il existe $y_0 \in V$ t.q. $\alpha : \mathbb{R} \to V,\ t \mapsto y_0$ soit sol. max. de (E), $\mathcal{C} = \alpha(\mathbb{R}) = \{y_0\}$ et $f(y_0) = 0$. $\Big)$

$Q_2 = \Big($ il existe $\alpha : \mathbb{R} \to V$ une sol. max. de (E) t.q. α est non inj., $\alpha(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$, $\inf\{|t-t'| ;\ t \neq t' \text{ et } \alpha(t) = \alpha(t')\} > 0 \Big)$.

Lorsque Q est vraie, la prop.

$$(Q_1 \text{ et non } Q_2) \text{ ou } (\text{non } Q_1 \text{ et } Q_2) \quad (**)$$

est vraie.

Lorsque Q_2 est vraie, toute sol. α vérifiant les cond. dans Q_2 est périodique de (plus petite) période $T = \inf\{|t-t'| ;\ t \neq t' \text{ et } \alpha(t) = \alpha(t')\}$.

De plus, dans ce cas, α' ne s'annule pas.

Rq. : $*$ Dire que la prop. $(*)$ est vraie revient à dire que $\mathcal{P}$ et Q s'excluent mutuellement ou encore que ($\mathcal{P}$ ou (exclusif) Q) est vraie ou encore que de deux choses l'une :

- soit $\mathcal{P}$ est vraie (et Q est fausse)
- soit Q est vraie (et $\mathcal{P}$ est fausse).

* Lorsque Q est vraie, la prop. (**) est aussi vraie c'est-à-dire que l'une au plus des prop. Q_1 et Q_2 est vraie.

* Lorsque Q_1 est vraie, la sol. max. est <u>cte</u>! Cela ne peut se produire que qd $f(\text{cte}) = 0$.

* Lorsque Q_2 est vraie, α est périodique de période T. En parti.,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{b} & \mathcal{C} \\ e^{i\theta} & \longmapsto & \alpha\left(\theta \times \frac{T}{2\pi}\right) \end{array}$$

b est bijective. Comme α' ne s'annule pas on dit que $\mathbb{S}^1$ et $\mathcal{C}$ sont "difféomorphes". (voir cours sur les variétés).

<u>Preuve</u> : a). Soit $\alpha : J \to F$ une sol. max. de (E) t.q. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ pour $t_1 < t_2$ ds J. Par la prop. 7, $J = \mathbb{R}$.

b). Soit $\alpha : J \to F$ une sol. max. t.q. $\alpha'(t_1) = 0$ pour un $t_1 \in J$. Donc $f(\alpha(t_1)) = \alpha'(t_1) = 0$. La fonct. constante $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \alpha(t_1)$ est sol. max. de (E) et coïncide avec α en t_1. Donc $J = \mathbb{R}$ et α est constante égale à $\alpha(t_1)$, par C.L. De plus, f s'annule en $\alpha(t_1)$.

* Supposons Q fausse. Soit $\alpha : J \to F$ sol. max. t.q. $\alpha(J) = \mathcal{C}$.
Si α était non inj., on aurait par a) que Q est vraie. Contr.
Donc α est inj. Si α' s'annulait, on aurait par b). $\alpha = $ cte. Contr. avec l'inj. Donc α' ne s'annule pas.
P est donc vraie.

* Supposons Q vraie. Il existe donc $\alpha_0 : \mathbb{R} \to F$ sol. max. de (E) t.q. $\alpha_0(t_1) = \alpha_0(t_2)$ pour $t_1 < t_2$ et $\alpha_0(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$. Si P était vraie il existerait $\alpha : \underset{\text{int. ouv.}}{J} \xrightarrow[\text{sol. max}]{\text{inj.}} F$, $t_0 \in J$ et $y_0 \in F$ t.q. $\alpha(t_0) = y_0$ et $\alpha(J) = \mathcal{C}$. Comme $y_0 \in \mathcal{C}$, il existe $t_0' \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_0(t_0') = y_0$.

α et $\alpha_0(\cdot - t_0 + t_0')$ coïncident sur J par unicité car elles sont égales en t_0. Donc $J = \mathbb{R}$ par max. et

$$\alpha(t_1 + t_0 - t_0') = \alpha_0(t_1) = \alpha_0(t_2) = \alpha(t_2 + t_0 - t_0')$$

avec $t_1 + t_0 - t_0' \neq t_2 + t_0 - t_0'$.
Contr. avec l'inj de α.
Donc P est fausse, on a montré $(*)$.

On suppose désormais que Q est vraie.
On montre (**).

Lemme 0 : Soit $(G;+)$ un sous-gr. de $(\mathbb{R};+)$
Alors, avec exclusion mutuelle, on a

$G=\{0\}$

ou bien $\exists T>0,\ G=T\mathbb{Z}$

ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : admise. (voir Arnaudies - Fraysse Cours de Math. 2, Analyse). (voir TD)

Soit $\alpha_0 : \mathbb{R}\to V$ une sol. max. de (E) tq. $\alpha_0(\mathbb{R})=\mathcal{C}$ et pour laquelle il existe $t_1<t_2$ tq. $\alpha_0(t_1)=\alpha_0(t_2)$.
Par la prop. 8, α_0 est T_0-périodique pour $T_0=t_2-t_1>0$.
Soit $G=\{$périodes de $\alpha_0\}\neq\{0\}$ (car $T_0\in G$).
Soit $(T_1;T_2)\in G^2$. Pour $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\alpha_0\big(t+(T_2-T_1)\big)=\alpha_0(t-T_1+T_2)\overset{\alpha_0 \text{ est } T_2\text{-périod.}}{=}\alpha_0(t-T_1)$$

$$\overset{\alpha_0 \text{ est } T_1\text{-périodique}}{=}\alpha_0\big((t-T_1)+T_1\big)=\alpha_0(t).$$

Donc α_0 est (T_2-T_1)-périodique et $T_2-T_1\in G$.
Comme $0\in G$, G est sous-gr. de $(\mathbb{R},+)$.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\in G^{\mathbb{N}}$ tq. $T=\lim_{n\to\infty}T_n$ existe dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\alpha_0(t+T_n)=\alpha_0(t),$$

Comme α_0 est conti., on peut passer à la limite $n\to\infty$ et obtenir, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\alpha_0(t+T)=\alpha_0(t)$. Donc $T\in G$ et G est fermé.

Soit $A_0 = \{ |t-t'| ;\ t \neq t' \text{ et } \alpha_0(t) = \alpha_0(t') \}$.

On a $G \cap \mathbb{R}^{+*} \subset A_0$, soit $T_0 \in A_0$. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_0(t_0+T_0) = \alpha_0(t_0)$. Les fonct. $\alpha_0(\cdot + T_0)$ et α_0 sont sol. max. de l'éq. (E) et coïncident en t_0 donc, par unicité, elles sont égales donc $T_0 \in G$ et comme $T_0 > 0$, $T_0 \in G \cap \mathbb{R}^{+*}$. D'où $A_0 = G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

Comme $G \neq \{0\}$, et G est fermé, on a, par le lemme 0, 2 cas :

<u>1er cas :</u> $G = \mathbb{R}$. On montre que Q_1 est vraie et que Q_2 est fausse. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to V$ une sol. max. non inj. t.q. $\alpha(\mathbb{R}) = \mathcal{C} = \alpha_0(\mathbb{R})$. Il existe $s \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha(0) = \alpha_0(s)$ donc, par unicité de C.L.,

$$\alpha = \varphi(\cdot ; \alpha(0)) = \varphi(\cdot ; \alpha_0(s)) = \alpha_0(\cdot + s).$$

Donc $A = \{ |t-t'| ; t \neq t' \text{ et } \alpha(t) = \alpha(t') \} = A_0$.

D'où $\inf A = \inf A_0 = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*} = 0$ car $G = \mathbb{R}$.

Donc Q_2 est fausse. Comme $G = \mathbb{R}$, on a, pour tout $T \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_0(t+T) = \alpha_0(t)$. Donc α_0 est cte égale à $\alpha_0(0) =: y_0$. Donc $\mathcal{C} = \{y_0\}$. De plus

$$0 = \alpha_0'(0) = f(\alpha_0(0)) = f(y_0).$$

Donc Q_1 est vraie.

<u>2ème cas :</u> $G = T\mathbb{Z}$ avec $T > 0$. On montre que Q_1 est fausse et que Q_2 est vraie. Si α_0 était constante, on aurait $G = \mathbb{R}$. Contr. Donc α_0 n'est pas constante et $\mathcal{C}$ n'est pas un singleton.

Donc Q_1 est fausse. Comme $A_0 = G \cap \mathbb{R}^{*}$,

$\inf A_0 = T > 0$. Donc Q_2 est vraie.

On a montré (**).

On supp. Q_2 vraie. Soit α une sol. max. vérifiant les cond. dans Q_2. D'après ce qui précède, l'ens. G des périodes α est le s.gr. $T\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R};+)$ pour un $T>0$.

De plus, on a vu que $A := \{|t-t'| ;\ t \neq t' \text{ et } \alpha(t)=\alpha(t')\} = G \cap \mathbb{R}^{+*}$ donc $\inf A = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*} = T$, qui est la plus petite période de α. De plus, d'après b), α' ne s'annule pas. □

<u>Prop. 11</u> : Soit $\alpha : J \to F$ une sol. max. de (E) tq. $\sup J = +\infty$ et $l = \lim\limits_{+\infty} \alpha$ existe dans V. Alors $f(l) = 0$.

<u>Rq.</u> : * Dans le cadre de la prop. 11, α tend vers une traj. ponctuelle lorsque $t \to +\infty$.

* On a bien sûr le m. résultat en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

* On verra plus loin des cas d'appl. de cette prop. 11.

<u>Preuve</u> : * en dimension finie d'abord.

On supp. que $\dim F = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots ; e_n)$ une base de F. Pour $1 \leq j \leq n$, soit $L_j : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_j$.

c'est une forme liné. On montre que, pour tout $1 \leq j \leq n$, $L_j(f(l)) = 0$ ce qui donnera $f(l) = 0$.

Supposons $\mathrm{Re}\, L_j(f(l)) \neq 0$ pour un $j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$.

Par exemple $\mathrm{Re}\, L_j(f(l)) > 0$. Comme $\alpha \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et f est conti. en l, il existe $t_1 \in J$ tq.

$$t \geq t_1 \implies \mathrm{Re}\, L_j(f(\alpha(t))) > \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, L_j(f(l)).$$

Donc, pour $t \geq t_1$,

$$\mathrm{Re}\, L_j(\alpha(t)) = \mathrm{Re}\, L_j(\alpha(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \mathrm{Re}\, L_j(\alpha'(s))\, ds$$

Soit
$$\operatorname{Re} L_j(\alpha(t)) = \operatorname{Re} L_j(\alpha(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \operatorname{Re} L_j(f(\alpha(s)))\,ds$$
$$\geq \operatorname{Re} L_j(\alpha(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \tfrac{1}{2} \operatorname{Re} L_j(f(\ell))\,ds$$
$$\geq \operatorname{Re} L_j(\alpha(t_1)) + \frac{t-t_1}{2} \underbrace{\operatorname{Re} L_j(f(\ell))}_{>0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

Contr. car $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{Re} L_j(\alpha(t)) = \underbrace{\operatorname{Re} L_j(\ell)}_{\in\mathbb{R}}$, par conti. de $\operatorname{Re} L_j$.

Si $\operatorname{Re} L_j(f(\ell)) < 0$, on montre de m. qu'il existe $t_1 \in J$ tq. pour $t \geq t_1$,
$$\operatorname{Re} L_j(\alpha(t)) \leq \underbrace{\operatorname{Re} L_j(\alpha(t_1)) + \frac{t-t_1}{2} \underbrace{\operatorname{Re} L_j(f(\ell))}_{<0}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty}$$

et on obtient aussi une contr.

Donc, pour tout $j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} L_j(f(\ell)) = 0$.

De m., on montre que, pour tout $j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} L_j(f(\ell)) = 0$. On a donc, pour tout $j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$, $L_j(f(\ell)) = 0$.

* Preuve lorsque F est de dim. infinie.

Soit $L \in F^*$ une forme liné. conti. sur F. Par le raisonnement précédent, on montre que $\operatorname{Re} L(f(\ell)) = 0$, puis que $\operatorname{Im} L(f(\ell)) = 0$ donc que $L(f(\ell)) = 0$. On en déduit que
$$f(\ell) \in \{x \in F \,;\, \forall L \in F^*, L(x) = 0\}.$$
Par le th. de Hahn-Banach (Cf. Analyse fonctionnelle), cet ens. est $\{0\}$. Donc $f(\ell) = 0$. $\square$.