8) Flot d'un champ de vecteurs, dérivée de Lie, intégrales premières.

Soit $(F; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-esp. de Banach.

<u>Déf.</u> : * Un champ de vecteurs sur F est une appl. $v : U \to F$ où U est un ouvert de F.

* Un champ de vecteurs v sur F est dit de Cauchy-Lipschitz si v est C^1 et Dv est localement bornée.

<u>Rq.</u> : Soit $v : \underset{\substack{\text{ouv.}\\ \text{de } F}}{U} \to F$ un champ de vecteurs.

* Si $\dim F < +\infty$ et v est C^1 alors Dv est loca. bornée donc v est un champ de vect. de C.L.

* Si v est de C.L. alors l'éq. diffé. (E_v) d'inconnue $y : J_y \to F$ donnée par

$$\forall t \in J_y, \quad y'(t) = v(y(t))$$

satisfait les hyp. du Th. de C.L. De plus, cette éq. est <u>autonome</u>. Le flot de (E_v) est appelé <u>flot de v</u>.

<u>Déf.</u> : Un champ de vecteurs de C.L. v sur F est dit <u>complet</u> si toutes les sol. max. de (E_v) sont définies sur $\mathbb{R}$.

<u>Exemples</u> : Soit $v : U \to F$ un ch. de vect. de C.L.

* Si v est borné alors v est complet, d'après le cor. 2 (para. 5).

* Si v est globalement lipschitz alors v est complet, d'après le cor. 3 (para. 5). C'est le cas si Dv est bornée.

<u>Prop. 1</u> : Soit $v : U \to F$ un ch. de vect. de C.L. qui est complet. Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times U \longrightarrow U \\ (t,x) \longmapsto \varphi(t,x) \end{array}$ son flot, (qui est C^1)

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : U \longrightarrow U$ (de classe C^1)
$x \longmapsto \varphi(t;x)$

Alors $\varphi_0 = id_U$ et, pour $(s;t) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$.
En particulier, φ_t est bij. et φ_{-t} est sa bij. réci.
$(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un syst. dynamique.

Preuve : cela découle de la rq. juste après la prop. 6 (para. 6).

Déf. : Soit $v : U \to F$ dérivable et $f : U \to \mathbb{K}$ diffé. On appelle dérivée de Lie de f suivant (le long de) v la fonct.

$$L_v f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto (Df)(x).v(x).$$

Rq. : Soit $v : U \to F$ un ch. de vect. de C.L. et $f : U \to \mathbb{K}$ une fonction C^1. Soit φ le flot de v. Pour $x \in U$ et $t \in J_x$,

$$\partial_t (f \circ \varphi)(t;x) = (Df)(\varphi(t;x)).\partial_t \varphi(t;x)$$
$$= (Df)(\varphi(t;x)).v(\varphi(t;x)).$$

En particulier, pour $t = 0$, $\varphi(t;x) = x$ et

$$\partial_t (f \circ \varphi)(0;x) = (Df)(x).v(x) = L_v f(x).$$

$$\| $$

" $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t;x)\Big|_{t=0}$ ".

Prop. 2 : Pour $v ; w : U \to F$ dérivables, pour $f_1 ; f_2 : U \to \mathbb{K}$ diffé. et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$L_v(f_1 + f_2) = L_v f_1 + L_v f_2$, $L_v(f_1 f_2) = f_1 L_v f_2 + f_2 L_v f_1$, $L_v(\lambda f) = \lambda L_v f$,
$L_{v+w}(f_1) = L_v f_1 + L_w f_1$, $L_{\lambda v} f_1 = \lambda L_v f_1$.

Preuve : cela résulte des prop. usuelles de dérivation. $\square$

Déf. : Soit $v : U \to F$ un ch. de vect. de C.L. et $H : U \to \mathbb{K}$. On dit que H est une intégrale première de v si H est constante sur chaque orbite de v.

Prop. 3 : Dans le cadre préc. avec H de classe C^1, on a

$$(H \text{ intég. prem. de } v) \Longleftrightarrow (L_v H = 0 \text{ sur } U).$$

Preuve : $\Rightarrow$). Soit $\mathcal{C}$ une orbite de v et c la valeur de H sur $\mathcal{C}$. Soit $x \in \mathcal{C}$. Pour tout $t \in J_x$, $\varphi(t;x) \in \mathcal{C}$ donc $H(\varphi(t;x)) = c$. Donc, pour $t \in J_x$,

$$0 = \frac{d}{dt}\left(H \circ \varphi(t;x)\right) = L_v H \circ \varphi(t;x).$$

D'où $L_v H = 0$ sur $\mathcal{C} = \mathrm{Im}\,\varphi(\cdot\,;x)$. Comme U est réunion d'orbites de v, $L_v H = 0$ sur U.

$\Leftarrow$) Soit $\mathcal{C}$ une orbite de v et $x \in \mathcal{C}$. Pour $t \in J_x$

$$\frac{d}{dt}\left(H \circ \varphi(t;x)\right) = L_v H\left(\varphi(t;x)\right) = 0.$$

Donc $J_x \ni t \longmapsto H(\varphi(t;x))$ est constante. Donc H est constante sur l'orbite de x : $\mathcal{C}$. $\square$

Prop. 4 : Soit $v : U \to F$ un ch. de vect. de C.L. et $H : U \to \mathbb{K}$ une intég. 1ère C^1 de v. Pour $c \in \mathbb{K}$, $H^{-1}(\{c\})$ est soit vide soit une réunion d'orbites de v. Les orbites de v qui rencontrent $H^{-1}(\{c\})$ sont incluses dans $H^{-1}(\{c\})$ et en forment une partition.

Preuve : Supposons $H^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$. Soit $x \in H^{-1}(\{c\})$. H est constante égale à $H(x) = c$ sur l'orbite de x. Donc $\mathcal{C}(x) \subset H^{-1}(\{c\})$

Comme
$$H^{-1}(\{c\}) \subset \bigcup_{x \in H^{-1}(\{c\})} \mathcal{C}(x) \subset H^{-1}(\{c\})$$
on a $\quad H^{-1}(\{c\}) = \bigcup_{x \in H^{-1}(\{c\})} \mathcal{C}(x)$.

Si une orbite $\mathcal{C}$ rencontre $H^{-1}(\{c\})$ alors, pour $x \in \mathcal{C} \cap H^{-1}(\{c\})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(x) \subset H^{-1}(\{c\})$ par le raisonnement préc'.

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux orbites qui rencontrent $H^{-1}(\{c\})$.
On sait que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ (cf. para. 7).
Donc l'ens. des orbites de v qui rencontrent $H^{-1}(\{c\})$ forment une partition de $H^{-1}(\{c\})$. $\square$

Cas où $\dim F = n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $v : \underset{\substack{\text{ouv.} \\ \text{de } F}}{U} \to F$ C^1. Soit $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ une base de F. Pour $x \in U$, il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tq. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme $v(x) \in F$, il existe $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x) \in \mathbb{K}$ tq. $v(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i$. Soit $f : U \to \mathbb{K}$ C^1. Pour $x \in U$, $Df(x) \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$ et sa matrice de la base $\mathcal{B}$ vers la base (1) de $\mathbb{K}$ est
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Donc, pour $x \in U$,
$$L_v f(x) = Df(x).v(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right). \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \vec{\nabla} f(x) . \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$
produit scal. de $\mathbb{K}^n$.

où $\vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$

Prop. 5 : Dans le cadre précédent, f est une intég. 1ère de v ssi, pour tout $x \in U$, $\vec{\nabla} f(x)$ est orthogonal à $v(x)$.

Preuve : f intég. 1ère de v $\Leftrightarrow L_v f = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} f \cdot v = 0$. $\square$

Exemples : * Soit $v : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto \lambda(x) e_1$ où $\lambda : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est C^1.

e_1 → 1er vect. de la base cano. de $\mathbb{K}^n$.

Pour $j \in [2;n] \cap \mathbb{N}$, soit $f_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_j$ la jè coord. de x dans la base cano.

On a

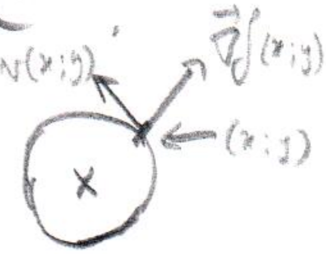
$$\vec{\nabla} f_j(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{jè position} \quad \text{et } v(x) = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{\nabla} f_j(x) \cdot v(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.

$f_2, \dots, f_n$ sont des intég. 1ères de v.

* Soit $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ C^1.
$(x;y) \mapsto (-y;x)$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \to \mathbb{R}$ C^1.
$(x;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$



On a $\vec{\nabla} f(x;y) = \dfrac{1}{f(x;y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc

$$\vec{\nabla} f(x;y) \cdot v(x;y) = \frac{1}{f(x;y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = 0.$$

On remarque que les "courbes de niveau" de f contiennent une et une seule orbite de v.

* Champ hamiltonien associé à une fonct. de Hamilton : Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2.

Soit $v_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
$(x;\xi) \mapsto (\vec{\nabla}_\xi H(x;\xi); -\vec{\nabla}_x H(x;\xi))$

ici. $\vec{\nabla}_\xi H(x;\xi) = \begin{pmatrix}\partial_{\xi_1}H\\ \vdots \\ \partial_{\xi_n}H\end{pmatrix}(x;\xi)$, $\vec{\nabla}_x H(x;\xi) = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}H\\ \vdots\\ \partial_{x_n}H\end{pmatrix}(x;\xi)$.

En parti., pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$D_\xi H(x;\xi).h = \vec{\nabla}_\xi H(x;\xi)\cdot h$$

produit scal. de $\mathbb{R}^n$

$$D_x H(x;\xi).h = \vec{\nabla}_x H(x;\xi)\cdot h.$$

On a

$$L_{v_H} H(x;\xi) = \left(D_x H(x;\xi)\,;\, D_\xi H(x;\xi)\right).v_H(x)$$

$$= D_x H(x;\xi).\vec{\nabla}_\xi H(x;\xi) + D_\xi H(x;\xi).\left(-\vec{\nabla}_x H(x;\xi)\right)$$

produit scal.

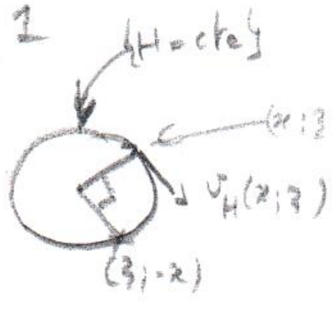
$$= \vec{\nabla}_x H(x;\xi)\cdot\vec{\nabla}_\xi H(x;\xi) - \vec{\nabla}_\xi H(x;\xi)\cdot\vec{\nabla}_x H(x;\xi)$$

$$= 0.$$

Donc les orbites de v_H sont tracées sur les couches de niveau de H.

Cas parti. : $H : \mathbb{R}^2 \to y^2$ C^1

$$(x;\xi) \longmapsto \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$



Alors $v_H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x;\xi) \longmapsto (\xi;-x)$$